École d'ingénierie

Examen final sur les méthodes numériques

Durée (2 h : 00)

TC: G.C.1+MECA.1+G.IND.

Prof. : A.Ramadane, Ph.D.

12-06-2017

Université Internatio
de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSI

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) qui permet de résoudre le problème est

1. Étant donné un pas de temps h, une condition initiale $(t_0, y_1(t_0), y_2(t_0))$ et un nombre maximal d'itérations N ;
2. Pour $0 \leq n \leq N$:

$$\begin{array}{rcl} K_1 & = & hF(t_n, Y_n) \\ K_2 & = & hF(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{K_1}{2}) \\ Y_{n+1} & = & Y_n + K_2 \\ t_{n+1} & = & t_n + h \\ \text{Écrire} & & t_{n+1} \quad \text{et} \quad y_{n+1} \end{array}$$

3. Arrêt

Schéma RK4

1. Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N
2. Pour $0 \leq n \leq N$:
3. $k_1 = hf(t_n, y_n)$
4. $k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$
5. $k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$
6. $k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$
7. $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
8. $t_{n+1} = t_n + h$
9. Arrêt

Exercice1 (5 points) :

On veut résoudre l'équation différentielle avec condition initiale

$$y'(t) = te^{\frac{t^2}{2}}e^{y(t)}, \quad y(0) = 0.$$

a) En prenant h=0,1, faire une itération de la méthode d'Euler explicite
b) En prenant h=0,1, faire une itération de la méthode d'Euler implicite
c) En prenant h=0,1, faire une itération de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4
d) Si on vous demande de choisir la meilleure méthode, quelle méthode choisissez-vous, justifier votre réponse.

rcice2 (4,5 points) :

Considérons le problème modèle :

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad \text{où} \quad t > t_0 \quad \text{et} \quad \lambda > 0$$

a) Donner la solution analytique.
b) En considérant des approximations de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt$ retrouver les méthodes d'Euler explicite, implicite et la méthode de Grank-Nicholson, ainsi que l'ordre des méthodes (2 points)
c) Déterminer les valeurs de h pour que la méthode d'Euler explicite appliquée au problème modèle soit stable ainsi que l'ordre de la méthode.
d) Déterminer les valeurs de h pour que la méthode d'Euler implicite appliquée au problème modèle soit stable.

Exercice3 (5,5 points) :

Considérons le problème :

$$\begin{cases} y'(t) &= -y(t) + t + 1, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

a) Montrer que la solution exacte est :
$y(t) = e^{-t}+t$

$t=0,3$

b) Donner une approximation de la solution au point t=3, y_3, en utilisant la méthode d'Euler Explicite avec un pas h=0,1

$t=0,2$

c) Donner une approximation de la solution au point t=2, y_2, en utilisant la méthode d'Euler Implicite avec un pas h=0,1

d) Donner l'ordre de la méthode Explicite en utilisant deux méthode.

e) Faire une itération de la méthode de Grank-Nicholson pour trouver la solution du problème suivant :

$$y'(t) = \ t \sin(y(t)),\ y(0)=2$$

Au point $t = 0,1$

ercice 4 (5 points):

Utiliser la méthode de différence finis pour résoudre d'une manière générale

$$Y''(t) + t^2\, Y'(t) = t,\ \ Y(0)=0,\ Y(5)=2\ (*)$$

Sur l'intervalle [0,5].

a) Représenter le maillage en donnant le pas h, donner la relation qui lie le nombre de nœuds et le pas h, et à quoi sert ces nœuds pour la résolution des équations différentielles

b) Montrer que $y'(x) \simeq \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$, (dérivée centrée d'ordre2) et que cette approximation est d'ordre 2.

c) $Y''(x) \simeq \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}$, (dérivée centrée d'ordre2) et que cette approximation est d'ordre 2.

d) Utiliser les questions b) et c) pour transformer le problème d'équation différentielle à la résolution d'un système linéaire. Résoudre le problème pour un nombre de nœuds 3 (inconnues).