UNIVERSITÉ INTERNATIONALE DE CASABLANCA

Nous innovons pour votre réussite !

Examen en méthode numérique

Durée (2h : 00 mn)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Université Internationa
de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 1 (4 points) :

Soit les valeurs expérimentales suivantes, que l'on a obtenues en mesurant la vitesse en (Km/h) d'un véhicule toutes les 5 secondes :

t(s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$v(km/h)$	55	60	58	54	55	60	54	57	52	49

Donner une valeur réaliste de la vitesse à 42.5 s, Justifier votre réponse d'une manière très rigoureuse.

Exercice 2 (6 points)

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-3}^{5} e^{-x^2} dx$$

a) Calculer une approximation de I en appliquant la méthode du trapèze composée avec 5 intervalles.
b) Pour cette méthode, quel est le nombre minimal d'intervalles à utiliser pour obtenir une approximation qui a une erreur d'au plus 10^{-3} ?
?c) Refaire la question a pour la méthode de Simpson. ← ?!!
d) Utiliser la méthode de quadrature de Gauss à 4 nœuds pour trouver une approximation de I

Exercice3 (6 points)

Obtenir l'ordre de précision de l'approximation de la dérivée:

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

a) Obtenir l'ordre de cette approximation en utilisant les développements de Taylor appropriés (détailler les calculs).
b) Utiliser cette formule de différences pour obtenir une approximation de $f''(3{,}0)$ pour la fonction tabulée suivante, en prenant d'abord $h = 0{,}2$, ensuite $h = 0{,}1$.

x	f(x)
2.8	1,587 7867
2.9	1,641 8539
3.0	1,693 1472
3.1	1,741 9373
3.2	1,788 4574

c) Soit l'approximation de la dérivée première

$$f'(x) \simeq \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h}.$$

A l'aide de développements de Taylor de degré approprié, obtenir l'ordre de cette approximation.

d) Sachant que

$$f(0,2) = 0,9798652;$$
$$f(0,4) = 0,9177710;$$
$$f(0,6) = 0,8080348;$$
$$f(0,8) = 0,6386093;$$
$$f(1,0) = 0,3843735,$$

Evaluer f'(0,2) avec h=0,4.

Exercice 4 (4 points)

On a mesuré toutes les 10 secondes la vitesse (en m/s) d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique. On a calculé à l'aide de ces données la table de différences divisées suivante:

i	t_i	$f(t_i)$	$f[t_i, t_{i+1}]$	$f[t_i, \cdots, t_{i+2}]$	$f[t_i, \cdots, t_{i+3}]$
0	0	2,00			
			$-1,1 \times 10^{-2}$		
1	10	1,89		?	
			$-1,7 \times 10^{-2}$		?
2	20	1,72		?	
			$-2,8 \times 10^{-2}$		
3	30	1,44			

(a) Compléter la table.

(b) Trouver l'approximation de la vitesse (en m/s) à $t = 15$ s avec le polynôme de Newton de degré 2.

(c) Donner une approximation de l'erreur commise sur la vitesse calculée en (b).

$P_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$
$+ c_2(x - x_0)(x - x_1)$
$+ c_3\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x$

Scanned by CamScanner

Aide mémoire d'analyse numérique

A. Ramadane, Ph.D.

Définitions, développement de Taylor et erreur de troncature

- Erreur absolue: $\Delta x = |x - x^*|$
- Erreur relative: $e_r(x) = \frac{\Delta x}{|x|}$
- Chiffres significatifs:

  Le chiffre de x^* associé à la puissance de m et les chiffres associés aux puissances supérieures tels que $\Delta x \leq 0,5 \times 10^m$.

- $f(x_0 + h) = P_n(h) + R_n(h)$:

$$\begin{cases} P_n(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n \\ R_n(h) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(h))h^{(n+1)} \quad \text{pour } \xi(h) \text{ entre } x_0 \text{ et } x_0 + h. \end{cases}$$

- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$:

$$\begin{cases} P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))(x - x_0)^{(n+1)} \quad \text{pour } \xi(x) \text{ entre } x_0 \text{ et } x. \end{cases}$$

- $f(h) = \mathcal{O}(h^n)$:

  Il existe une constante $C > 0$ t.q. $\left|\frac{f(h)}{h^n}\right| \leq C$ pour h près de 0.

Interpolation

- Interpolation polynômiale de Lagrange: étant donné $(n+1)$ points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \cdots, n$:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x),$$

$$\text{où} \quad L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

- Différences divisées: $f[x_i] = f(x_i)$,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \quad \text{etc.}$$

- Polynôme de Newton:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

où $a_i = f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i]$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$

- Erreur d'interpolation:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \quad \text{pour} \quad \xi(x) \in]x_0, x_n[$$

- Approximation de l'erreur d'interpolation:

$$E_n(x) \simeq f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

- Borne de l'erreur d'interpolation:

$$|E_n(x)| \leq \max_{\xi(x) \in]x_0, x_n[} |f^{(n+1)}(\xi(x))| \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \quad \text{pour} \quad h = x_i - x_{i-1} \quad \text{où} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Différentiation et intégration numériques

- Différentiation numérique:

formule de différence finie	terme d'erreur
$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$-\frac{f''(\xi)}{2}h$
$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$	$\frac{f''(\xi)}{2}h$
$f'(x) \simeq \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h}$	$\frac{f'''(\xi)}{3}h^2$
$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$	$-\frac{f'''(\xi)}{6}h^2$
$f'(x) \simeq \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h}$	$\frac{f'''(\xi)}{3}h^2$
$f''(x) \simeq \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$	$-f'''(\xi)h$
$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$	$-\frac{f''''(\xi)}{12}h^2$
$f''(x) \simeq \frac{f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x)}{h^2}$	$f'''(\xi)h$
$f''(x) \simeq \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2}$	$\frac{1}{90}f^{(6)}(\xi)h^4$

- **Extrapolation de Richardson:**

Soit

$$Q_{exa} = Q_{app}(h) + c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + c_{n+2} h^{n+2} + \dots$$

alors pour $p > 1$

$$Q_{exa} = \frac{p^n Q_{app}(\frac{h}{p}) - Q_{app}(h)}{p^n - 1} + \frac{\left(\frac{1}{p} - 1\right) c_{n+1} h^{n+1} + \left(\frac{1}{p^2} - 1\right) c_{n+2} h^{n+2} + \dots}{p^n - 1}$$

- **Quadratures de Newton-Cotes:**

méthode	formule de quadrature	terme d'erreur	nombre de points
trapèze	$\frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))$	$-\frac{f''(\xi)}{12} h^3$	2
trapèze composée	$\frac{h}{2}(f(x_0) + 2(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n))$	$-\frac{(b-a)}{12} f''(\xi) h^2$	$n+1$
Simpson $\frac{1}{3}$	$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$	$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	3
Simpson $\frac{1}{3}$ composée	$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$	$-\frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) h^4$	$2n+1$
Simpson $\frac{3}{8}$	$\frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$	$-\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} h^5$	4
Simpson $\frac{3}{8}$ composée	$\frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \dots + 2f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n}))$	$-\frac{(b-a)}{80} f^{(4)}(\xi) h^4$	$3n+1$
Boole	$\frac{2h}{45}(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4))$	$-\frac{8f^{(6)}(\xi)}{945} h^7$	5
Boole composée	$\frac{2h}{45}(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 14f(x_4) + \dots + 32f(x_{4n-5}) + 14f(x_{4n-4}) + 32f(x_{4n-3}) + 12f(x_{4n-2}) + 32f(x_{4n-1}) + 7f(x_{4n}))$	$-\frac{2(b-a)}{945} f^{(6)}(\xi) h^6$	$4n+1$

- **Intégration de Gauss:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\,dt \simeq \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i g(t_i)$$

nb de pts (n)	points de Gauss t_i	poids de Gauss ω_i	degré de précision ($2n-1$)
1	+0,000 000 000	2,000 000 000	1
2	−0,577 350 269 +0,577 350 269	1,000 000 000 1,000 000 000	3
3	−0,774 596 669 +0,000 000 000 +0,774 596 669	0,555 555 556 0,888 888 889 0,555 555 556	5
4	−0,861 136 312 −0,339 981 044 +0,339 981 044 +0,861 136 312	0,347 854 845 0,652 145 155 0,652 145 155 0,347 854 845	7

4