Contrôle en méthodes numériques

Durée (2 h : 00 mn)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Université Internatic
de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERS

Exercice 1 (5 points)

Soit les trois points $q_1 = (0, 1)$, $q_2 = (\pi/16, \cos(\pi/16))$ et $q_3 = (\pi/8, \cos(\pi/8))$ de la fonction $f(x) = \cos(x)$.

(a) Obtenir à l'aide de l'interpolation de Lagrange, le polynôme de degré 2 qui passe par les 3 points et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.

(b) Calculer le développement de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x) = \cos(x)$ autour de $x_0 = 0$ et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.

(c) Sachant que $f'(0) = 0$, calculer le polynôme de dégré 2, passant par les points q_1 et q_3 dont la dérivée en $x = 0$ est égale à 0 et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.

(d) Des trois approximations $\cos(\pi/32)$ que vous avez obtenues, qu'elle est la plus précise? Pourquoi?

Exercice 2 (5 points)

On considère la table de différences divisées suivante:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i-1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i-2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i-3}]$
1,9	0,94630			
		-0,127975		
1,5	0,99749		?	
		-0,314725		?
2,3	0,74571		?	
		-0,795824		
2,7	0,42738			

$\frac{0,94630}{9,1}$

$\frac{0,7457}{2}$

(a) Completer la table.

(b) En vous servant de la table de différences divisées, calculer une approximation de $f(1,8)$ en utilisant le polynôme de Newton passant par les 3 premiers points.

(c) Donner une estimation de l'erreur d'interpolation en $x = 1,8$ et en déduire le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue en (b).

(d) Sachant que $f(x) = \sin(x)$, calculer une borne supérieure de la valeur absolue de l'erreur d'interpolation en $x = 1,8$.

(e) Quel polynôme est le plus précis, celui trouvé en (b), ou le polynôme de Lagrange passant par $f(x)$ en $x = 1,5$; 1,9 et 2,3? Justifier votre reponse.

Exercice 3 (5 points)

Obtenir l'ordre de précision de l'approximation de la dérivée:

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

a) Obtenir l'ordre de cette approximation en utilisant les développements de Taylor Appropriés.

b) Utiliser cette formule de différences pour obtenir une approximation de $f''(2,0)$ pour la fonction tabulée suivante, en prenant d'abord h = 0, 2, ensuite h =0,1.

x	f(x)
1.8	1,587 7867
1.9	1,641 8539
2.0	1,693 1472
2.1	1,741 9373
2.2	1,788 4574

Exercice 4 (5 points)

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-3}^{3} e^{6x^3} dx$$

a) Calculer une approximation de I en appliquant la méthode du trapèze composée avec 4 intervalles.

b) Pour cette méthode, quel est le nombre minimal d'intervalles à utiliser pour obtenir une approximation qui a une erreur d'au plus 10^{-2} ?

c) Utiliser la méthode de quadrature de Gauss à 3 nœuds pour trouver une approximation de I

LAUREATE SOMED EDUCATION HOLDING • Zénith Millénium, Bâtiment 6, Lot Attawfiq, Sidi Maârouf Casablanca • Tél : 05 29 02 37 00 • Fax : 05 22 78 61 04
Capital social 111, 830,000.00 dhs • Taxe professionnelle 37981111 • N°RC 214245 • N°IF 40192279
| www.uic.ac.ma |

d) Calculer une approximation de I en appliquant la quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq \frac{1}{2} f(-1) + \frac{3}{2} f(\frac{1}{3})$$

e) Sachant que le degré de précision de la méthode du trapèze composée est 1, est-il possible d'obtenir avec cette méthode (en utilisant un nombre suffisamment grand d'intervalles) une approximation qui soit meilleure que celle que l'on peut calculer par la quadrature de la question (d) ? Discuter