La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. (2 pts)

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. L'examen final est composé d'une page, de trois exercices indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du contrôle : 2H – Exercice 1 (6 points), Exercice 2 (6 points) et Exercice 3 (6 points) = Bon Travail =

Exercice 1

On rappelle que la fonction indicatrice χ est définie par

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\chi_{[-1,1]}$.

2. Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{dt}$.

Exercice 2

On considère le système différentiel suivant :

$$(\mathbf{S}) \begin{cases} y' = 4y + 4z \\ z' = y + 4z \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Notons $X(u) = L(y)(u)$ et $T(u) = L(z)(u)$ les transformées de Laplace de y et de z.

1. Déterminer les relations vérifiées par X et T.

2. Déduire la solution (y, z) du système différentiel (S).

Rappel : La transformée de Laplace de la fonction e^{at} est $\frac{1}{s-a}$.

Exercice 3

Soit L un réel strictement positif, on cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant :

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} -u''(x) + u(x) = 1, \quad \forall x \in [0, L] \\ u(0) = 2, \quad u'(L) = 3, \end{cases}$$

On discrétise le domaine $[0, L]$ en N noeuds. $(h = \frac{L}{N})$ et on note $u_i \simeq u(x_i)$ pour $0 \leq i \leq N$.

1. Rappeler les approximations de $u'(x)$ et $u''(x)$.

2. Ecrire l'algorithme obtenu en utilisant la méthode des différences finies au problème (P).

3. Déduire que le problème obtenu est équivalent à résoudre le système linéaire : $AX = B$, déterminer A, X et B.

Pr:Hamid El Ouardi