Université Internationale de Casablanca **29 janvier 2019**

Pr. Morad Lakhssassi **Mathématiques Appliquées** **TC-ING**

EXAMEN FINAL – Durée 2h

4 PAGES DE RESUME fournies par le professeur sont AUTORISEES

0,5 points	• **Laissez une MARGE de 2 cm à GAUCHE** • **Inscrivez votre GROUPE**
0,5 points	• **Soignez l'écriture** • **NUMEROTEZ vos feuilles doubles**

Justifiez vos réponses !

Exercice 1 :

a) Résoudre sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$ à définir l'EDO suivante : $y' = y^2$

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$

Exercice 2 :

Les fonctions triangle Λ et porte Π sont définies dans votre formulaire. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes : a) $t \longmapsto \Lambda\big(2(\mathrm{t}-1)\big)$ b) $t \longmapsto t^2.\Pi(\mathrm{t})$

Exercice 3 :

On considère la fonction gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-\pi.t^2}$. Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de cette fonction. Le calcul simple par intégration n'est pas faisable, on procède de la manière suivante :

a) Calculer la dérivée de f et l'exprimer en fonction de f.

b) Déterminer de deux manières différentes la transformée de Fourier de f' : $\mathcal{F}f'$ (qui peut s'écrire $\mathcal{F}(f')$).

c) En déduire une relation entre $\mathcal{F}f$ et $\mathcal{F}'f$ (qui peut s'écrire $\mathcal{F}'(f)$).

d) Montrer que $\mathcal{F}\big(e^{-\pi t^2}\big)(u) = k.e^{-\pi u^2}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

a) En utilisant la relation de la transformée de la transformée, montrer que $k = 1$.

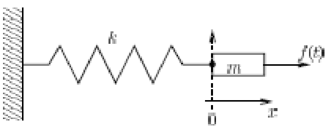
Exercice 4 :

On rappelle que pour une fonction causale f, sa transformée de Laplace est définie pour un $p \in \mathbb{C}$ par :

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt$$

a) Calculer en détail : $\mathcal{L}(e^{at})(p)$ et $\mathcal{L}\big(sh(\omega t)\big)(p)$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ et trouver les domaines d'appartenance de p pour chacune des deux transformées (justifier).

b) On considère le système masse ressort. Un ressort linéaire de raideur k est attaché par une de ses extrémités à une fondation fixe et par l'autre à une masselotte de masse m qui subit elle-même l'influence d'une force $f(t)$. La position de la masselotte est représentée par $x(t)$ avec une position au repos $x = 0$. L'évolution de $x(t)$ est donnée par : $\begin{cases} m.x''(t) + k.x(t) = f(t) \\ x(0) = x_0 , x'(0) = x_1 \end{cases}$



b.1) Exprimer $\mathcal{L}x$ en fonction de $\mathcal{L}f$.

b.2) On suppose pour simplifier que $x_0 = 0 = x_1$, trouver $x(t)$.