Pr. Morad LAKHSSASSI — TC – ING — 1

UIC — 2018 – 2019 — 29 – 01 – 2019

Mathématiques Appliquées
EXAMEN FINAL

Exemple de Corrigé

EXERCICE 1 : 4,5 + 0,5 BONUS

1,5 +0,5 Bonus — a)

$$y' = y^2 \overset{\boxed{\text{si } y \neq 0}}{\Longleftrightarrow} \frac{y'}{y^2} = 1 \Longleftrightarrow \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1$$

0,5

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{y} = x + c \ , \ c \in \mathbb{R}$$

BONUS 0,5

$$\overset{\boxed{\text{si } x \neq -c}}{\Longleftrightarrow} y = -\frac{1}{x+c}$$ et y n'est jamais $= 0$ dans ce cas !

0,5

d'où 0,5 $\boxed{\forall c \in \mathbb{R}, \ y = -\frac{1}{x+c} \ , \ \forall x \in I = \mathbb{R} \setminus \{-c\}}$

($\forall c \in \mathbb{R}$ on a une solution).

3 — b)

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$: EDL2 à coeff. constants

(SH) : Equation caractéristique : $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$

d'où $r = -2$ est l'unique racine double réelle

d'où la solution de l'équation homogène :

0,5 $$y_h = (\lambda t + \mu) \cdot e^{-2t} \ , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

(SP) : On a deux solutions de l'équation homogène : $(E_h) : y'' + 4y' + 4y = 0$:

$$y_1 = te^{-2t} \quad \text{et} \quad y_2 = e^{-2t}$$

→ Méthode de Variation des Constantes :

$$y_p = \lambda(x)\, t e^{-2t} + \mu(x)\, e^{-2t}$$

avec λ' et μ' solutions du système suivant :

1 $$(S) : \begin{cases} \lambda' . t e^{-2t} + \mu' e^{-2t} = 0 \\ \lambda' \left(t e^{-2t}\right)' + \mu' \left(e^{-2t}\right)' = \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda' t + \mu' = 0 \quad (\text{car } e^{-2t} \neq 0) & (1) \\ \lambda'(1-2t) - 2\mu' = \dfrac{1}{1+t^2} & (2) \end{cases}$$

(2) − 2(1) donne $\begin{cases} \lambda' = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \mu' = -t . \lambda' \end{cases}$

95 $$\iff \begin{cases} \lambda = \arctan(t) + c_1 , & c_1 \in \mathbb{K} \\ \mu' = -\dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

1 $$\iff \begin{cases} \lambda = \arctan(t) + c_1 , & c_1 \in \mathbb{K} \\ \mu = -\dfrac{1}{2} . \ln(1+t^2) + c_2 , & c_2 \in \mathbb{K} \end{cases}$$

On cherche une solution particulière, on peut donc prendre $c_1 = 0 = c_2$

d'où $$y_p = t . \arctan(t) . e^{-2t} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) . e^{-2t}$$

Conclusion : SG : $y = y_h + y_p$

95 $$\boxed{y = \left((\lambda t + \mu) + t \arctan(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right) . e^{-2t} \ ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}}$$

EXERCICE 2 : 4,5

2,5 a)

$$\mathcal{F}\left(\Lambda(2(t-1))\right)(\mu) = \mathcal{F}\left(\Lambda(2t-2)\right)(\mu)$$

0,5 On pose $\boxed{g(t) = \Lambda(2t)}$, d'où $\Lambda(2t-2) = g(t-1)$

d'où $\mathcal{F}\left(\Lambda(2(t-1))\right)(\mu) = \mathcal{F}\left(g(t-1)\right)(\mu)$

0,5 $= e^{-2i\pi\mu} \cdot \mathcal{F}g(\mu)$

0,5 $= e^{-2i\pi\mu} \cdot \mathcal{F}\left(\Lambda(2t)\right)(\mu)$

0,5 $= e^{-2i\pi\mu} \cdot \dfrac{1}{|2|} \mathcal{F}\Lambda\left(\dfrac{\mu}{2}\right)$

$= \dfrac{e^{-2i\pi\mu}}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\pi \dfrac{\mu}{2}\right)$

0,5 $$\boxed{\mathcal{F}\left(\Lambda(2t-1)\right)(\mu) = 2\, e^{-2i\pi\mu} \frac{\sin^2(\pi \mu/2)}{\pi^2 \mu^2}}$$

2 b) 0,5 $\mathcal{F}\left(t^2 \cdot \Pi(t)\right)(\mu) = \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^2 \dfrac{d^2}{d\mu^2} \mathcal{F}\Pi(\mu)$

$= \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^2 \dfrac{d^2}{d\mu^2}\left(\operatorname{sinc}(\pi\mu)\right)$

$\left(\operatorname{sinc}(\pi\mu)\right)' = \pi \cdot \operatorname{sinc}'(\pi\mu)$

0,5 $\left(\operatorname{sinc}(\mu)\right)' = \left(\dfrac{\sin\mu}{\mu}\right)' = \dfrac{\cos(\mu)\cdot\mu - \sin\mu}{\mu^2}$

$\left(\operatorname{sinc}(\pi\mu)\right)'' = \pi^2 \cdot \operatorname{sinc}''(\pi\mu)$

$\operatorname{sinc}''(\mu) = \left(\dfrac{\mu\cos\mu - \sin\mu}{\mu^2}\right)' = \dfrac{\mu^2(\cancel{\cos\mu} - \mu\sin\mu - \cancel{\cos\mu}) - 2\mu(\mu\cos\mu - \sin\mu}{\mu^4}$

$= \dfrac{-\mu\sin\mu - 2\cos\mu + 2\operatorname{sinc}}{\mu^2}$

d'où 0,5 $\quad \left(\mathrm{sinc}(\pi u)\right)'' = \pi^2 \cdot \dfrac{-\pi u \cdot \sin(\pi u) - 2\cos(\pi u) + 2\,\mathrm{sinc}(\pi u)}{(\pi u)^2}$

$= \left((2-\pi^2 u^2)\sin(\pi u) - 2\pi u \cos(\pi u)\right) / \pi u^3$

d'où 0,5 $\boxed{\mathcal{F}\left(t^2 \cdot \Pi(t)\right)(u) = \dfrac{\pi u \sin(\pi u) + 2\cos(\pi u) - 2\,\mathrm{sinc}(\pi u)}{4\pi^2 u^2}}$

$\parallel$

$\dfrac{(\pi u)^2 \sin(\pi u) + 2(\pi u)\cos(\pi u) - 2\sin(\pi u)}{4\pi^3 u^3}$

EXERCICE 3 : 5,5 points

$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{-\pi t^2}$

a) 0,5 $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = (-\pi t^2)' \cdot \exp'(-\pi t^2)$

$= -2t \cdot \pi \cdot e^{-\pi t^2} = -2\pi t \cdot f(t)$

$\boxed{f'(t) = -2\pi t \cdot f(t)}$

1,5 b) On a 0,5 $\boxed{\mathcal{F}f'(u) = (2i\pi u) \cdot \mathcal{F}f(u)}$

et 0,5 $\mathcal{F}f'(u) = \mathcal{F}\left(-2\pi t \cdot f(t)\right)(u)$

$= -2\pi\, \mathcal{F}\left(t \cdot f(t)\right)(u)$

$= -2\pi \left(\dfrac{i}{2\pi}\right) \cdot \dfrac{d}{du}\mathcal{F}f(u)$

0,5 $\boxed{\mathcal{F}f'(u) = -i \dfrac{d}{du}\mathcal{F}f(u)}$

0,5 c) d'où $\quad (2i\pi u) \cdot \mathcal{F}f(u) = -i \dfrac{d}{du}\mathcal{F}f(u)$

d'où : $\boxed{\mathcal{F}f'(u) = -2\pi u\, \mathcal{F}f(u)}$

① d) 5

$\mathcal{F}_f$ vérifie l'EDL suivante $y' + 2\pi u y = 0$

Cette EDL admet des solutions dans un espace vectoriel de dimension 1, il suffit donc de trouver une seule solution de l'équation pour en déduire les autres solutions.

vérifions alors si $u \mapsto e^{-\pi u^2}$ est solution :

$$\left(e^{-\pi u^2}\right)' + 2\pi u \cdot e^{-\pi u^2} = -2\pi u \cdot e^{-\pi u^2} + 2\pi u \, e^{-\pi u^2}$$
$$= 0$$

elle est bien solution.

d'où $\boxed{\mathcal{F}f(u) = k \cdot e^{-\pi u^2} \quad k \in \mathbb{R}}$ sont les solutions de l'EDO. (solutions dans le cadre réel)

Autre méthode: résolution directe de l'EDO :

0,5 $y' + 2\pi u y = 0 \iff y = k \cdot e^{-\int 2\pi u}$, $k \in \mathbb{R}$ (si cadre réel)

$\iff y = k \cdot e^{-\pi u^2}$ tout simplement

0,5 d'où $\boxed{\mathcal{F}f(u) = k \cdot e^{-\pi u^2}}$, $k \in \mathbb{R}$ (si cadre réel)

② e)

0,5 On a $\mathcal{F}(\mathcal{F}f(u))(t) = f(-t)$ avec $f(t) = e^{-\pi t^2}$

0,8 d'où $\mathcal{F}(k \cdot e^{-\pi u^2})(t) = \cdot e^{-\pi (-t)^2}$

or $\mathcal{F}(e^{-\pi u^2})(t) = k \cdot e^{-\pi t^2}$ (d'après d))

donc : $k^2 \cdot e^{-\pi t^2} = e^{-\pi t^2}$

0,25 d'où $\boxed{k^2 = 1}$

or $\mathcal{F}_f(0) = k \cdot e^{-\pi^2 0} = k$

+1 BONUS

et $= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-\pi t^2} e^{0}}_{>0} dt > 0$

d'où $k > 0$

d'où $\boxed{k = 1}$

(Remarque : Conclusion $\mathcal{F}(e^{-\pi t^2})(u) = e^{-\pi u^2}$.)

EXERCICE 4 : 6 points + 1,5 BONUS

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt}\, dt, \quad p \in \mathbb{C}$$

3 + 1 bonus

a) 1,5 + 1 BONUS

$a \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(e^{at})(p) = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}\, dt$$

0,5

$$= \frac{1}{a-p} \left[e^{(a-p)t} \right]_0^{+\infty}$$

$$\left| e^{(a-p)t} \right| = \left| e^{(\mathrm{Im}(a-p))it} \cdot e^{\mathrm{Re}(a-p)\, t} \right| = e^{\mathrm{Re}(a-p)t}$$

norme

0,5 si $\mathrm{Re}(a-p) < 0$ alors $e^{\mathrm{Re}(a-p)t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

d'où $e^{(a-p)t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

BONUS 1 pt

sinon si $\mathrm{Re}(a-p) > 0$, alors $\left| e^{(a-p)t} \right| \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow \mathcal{L}(e^{at})$ DV (diverge)

et si $\mathrm{Re}(a-p) = 0$, $\left| e^{(a-p)t} \right| = 1$

$e^{(a-p)t} = e^{i\,\mathrm{Im}(a-p)t}$: point du cercle trigo. qui tourne $\Rightarrow$ DV.

et on a $e^{(a-p)\cdot 0} = 1$

0,5 d'où $\boxed{\mathcal{L}(e^{at})(p) = \frac{1}{p-a} \quad \text{si } \mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(p)}$

(car $\mathrm{Re}(a-p) = \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Re}(p)$)

1,5 $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\mathrm{sh}(\omega t))(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \cdot e^{-pt}\, dt$

0,5

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{\omega t} \cdot e^{-pt}\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \cdot e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{\omega t})(p) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-\omega t})(p)$$

d'après ce qui précède

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+\omega} \quad \text{si } Re(\omega) < Re(p) \text{ et } Re(-\omega) < Re(p)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{p+\omega-(p-\omega)}{p^2-\omega^2} \quad \text{si } \omega < Re(p) \text{ et } -\omega < Re(p) \quad (\text{car } \omega \in \mathbb{R})$$

$$= \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \quad \text{si } Re(p) > |\omega|$$

0,5

d'où $\boxed{\mathcal{L}(sh(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \quad \text{si } Re(p) > |\omega|}$

0,5

3 + 0,5 BONUS **b)**

$$\begin{cases} m\,x''(t) + k\,.\,x(t) = f(t) \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1 \end{cases}$$

1,5 **b.1)** $\mathcal{L}(m\,x''(t) + k\,x(t))(p) = \mathcal{L}f(p)$

0,5 d'où $(m\mathcal{L}x'' + k\mathcal{L}x)(p) = \mathcal{L}f(p)$

0,5 d'où $m.(p^2\mathcal{L}x(p) - p\,x(0) - x'(0)) + k\mathcal{L}x(p) = \mathcal{L}f(p)$

d'où $(mp^2+k)\mathcal{L}x(p) - mpx_0 - mx_1 = \mathcal{L}f(p)$

0,5 d'où $\boxed{\mathcal{L}x(p) = \frac{\mathcal{L}f(p)}{mp^2+k} + \frac{mpx_0 + mx_1}{mp^2+k}}$

1,5 + 0,5 BONUS **b.2)** $x_0 = 0 = x_1$ d'où :

$$\mathcal{L}x(p) = \frac{1}{mp^2+k}\,.\,\mathcal{L}f(p)$$

0,5 d'où $\mathcal{L}x(p) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{k}{m}} \cdot \mathcal{L}f(p)$

On a $\mathcal{L}(\sin(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

d'où $\mathcal{L}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\right)(p) = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{p^2 + \frac{k}{m}}$

d'où $\mathcal{L}x(p) = \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \cdot \mathcal{L}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\right)(p) \cdot \mathcal{L}f(p)$

0,5 d'où $\mathcal{L}x(p) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{mk}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\right)(p) \cdot \mathcal{L}f(p)$

0,5 d'où $x(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) * f(t)$ sans sur $\mathbb{R}^+$ (fonction causale)

BONUS +0,5 d'où $\boxed{x(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{mk}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) * f(t)\right) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)}$