Corrigé CC

Exercice 1 : 6 points

1,5 a)

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y = y(x) \end{cases} \overset{\text{si } y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{y'}{y^2} = 1 \Longleftrightarrow \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{y} = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow y = -\frac{1}{x+C} \quad \text{si } x \neq -C$$

on a bien $y \neq 0$

et y définie et dérivable si $x \neq -C$

d'où $\boxed{y = -\frac{1}{x+C} \text{ sur } I = \mathbb{R} - \{-C\}}$

($\forall C \in \mathbb{R}$, on a une solution $y = -\frac{1}{x+C}$ sur $I = \mathbb{R} - \{-C\}$)

4,5 b)

Résoudre sur $]-1,1[$ $\quad (1-x^2)y'' - xy' + 4y = \arccos(x) \quad (1)$

en utilisant le chgt de variable $x = \cos(t)$

$y = \boxed{y(x)} = y(\cos t) = \boxed{z(t)}$ $\quad$ (avec $z = y \circ \cos$)

d'où $z'(t) = -\sin t \cdot y'(\cos t)$

d'où $z''(t) = -\cos t \cdot y'(\cos t) + \sin^2 t \cdot y''(\cos t)$

d'où (1) $\Longleftrightarrow (1-\cos^2(t))\, y''(\cos t) - \cos t \cdot y'(\cos t) + 4y(\cos t) = t$

car $t = \arccos x$, car $x \in]-1,1[$ et $x = \cos t$

(remarque $t \in]0,\pi[$ car $x \in]-1,1[$)

2

d'où $(1) \Leftrightarrow \underbrace{\sin^2 t \cdot y''(\cos t) - \cos t\, y'(\cos t)}_{\Rightarrow\ z''(t)} + 4\underbrace{y(\cos t)}_{z(t)} = t$

d'où $(1) \Leftrightarrow \boxed{z''(t) + 4z(t) = t \quad \text{avec} \quad t \in]0, \pi[}$

Trouvons les solutions de cette EDO (EDL2 à coeff. constants) :

SH : Éq. caract. $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{r = 0 \pm 2i} \to \alpha = 0,\ \omega = 2$

d'où : Cadre complexe : $\boxed{z_h = \lambda e^{2it} + \mu e^{-2it}\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}}$

Cadre réel : $z_h = \left(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)\right) e^{0t}$

$\boxed{z_h = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

SP : z_p doit être un polynôme de même degré que t (car le coefficient multiplié par $z(t)$ n'est pas nul) :

$z_p(t) = at + b \Rightarrow z''(t) = 0$

d'où $4(at+b) = t,\ \underline{\forall t \in I}$

d'où $a = \frac{1}{4}$ et $b = 0$

d'où $\boxed{z_p = \frac{1}{4} t}$

SG :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Cadre complexe : } z = \frac{t}{4} + \lambda e^{2it} + \mu e^{-2it}\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \\ \text{Cadre réel : } z = \frac{t}{4} + \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array}}$$

d'où

Cadre complexe :

$y(x) = z(t) = z(\arccos x) = \frac{\arccos x}{4} + \lambda e^{2i \arccos x} + \mu e^{-2i \arccos x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Cadre réel :

$y(x) = \frac{\arccos x}{4} + \lambda \cos(2 \arccos x) + \mu \sin(2 \arccos x)$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

BONUS :

On peut utiliser plus de trigonométrie et montrer que :

$\boxed{\text{Cadre réel : } y(x) = \frac{\arccos x}{4} + \lambda(2x^2-1) + 2\mu x\cdot\sqrt{1-x^2}\ ;\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}}$

Exercice 2 : 4 points

1,5 a) $\boxed{\mathcal{F}(\Lambda(t-5))(\mu) = e^{-2i\pi.5.\mu}\cdot \mathcal{F}_\Lambda(\mu) = e^{-10i\pi\mu}\cdot \text{sinc}^2(\pi\mu)}$

2,5 b) $\mathcal{F}(t\Lambda(t))(\mu) = \frac{i}{2\pi}\frac{d}{d\mu}\left(\mathcal{F}_\Lambda(\mu)\right)$

$= \frac{i}{2\pi}\frac{d}{d\mu}\left(\text{sinc}^2(\pi\mu)\right)$

$= \frac{i}{2\pi}\cdot 2\cdot \text{sinc}'(\pi\mu)\cdot \text{sinc}(\pi\mu)$ $\quad ((f^2)' = 2f'\cdot f)$

or $(\text{sinc}(\mu))' = \left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)' = \frac{\mu.\cos\mu - \sin\mu}{\mu^2}$

donc $\mathcal{F}(t\Lambda(t))(\mu) = i\cdot \text{sinc}(\pi\mu)\cdot\frac{\pi\mu.\cos(\pi\mu) - \sin(\pi\mu)}{(\pi\mu)^2}$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F}(t\Lambda(t))(\mu) &= i\,\frac{\pi\mu.\cos(\pi\mu).\sin(\pi\mu) - \sin^2(\pi\mu)}{(\pi\mu)^3}\\ &= i\,\frac{\pi\mu.\sin(2\pi\mu) - 2\sin^2(\pi\mu)}{2(\pi\mu)^3}\end{aligned}}$$

Exercice 4 : 5 points

1,5 a) On a $x(t) = v(t) + R.i(t)$

or $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ et $q(t) = C.v(t)$

donc $R.i(t) = RC.\frac{dv(t)}{dt}$

d'où $\boxed{RC.v'(t) + v(t) = x(t)}$

1,5 b) On y applique la T.F :

$$\mathcal{F}(RC\, v'(t) + v(t))(u) = \mathcal{F}(x(t))(u)$$

$\mathcal{F}$ est linéaire $\Rightarrow$ $RC\,\mathcal{F}_{v'}(u) + \mathcal{F}_v(u) = \mathcal{F}_x(u)$

$$\Rightarrow RC(2i\pi u)\mathcal{F}_v(u) + \mathcal{F}_v(u) = \mathcal{F}_x(u)$$

d'où $\boxed{(1 + RC.2i\pi u)\,\mathcal{F}_v(u) = \mathcal{F}_x(u)}$

2 c) d'où : $\mathcal{F}_v(u) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC} + 2i\pi u} \cdot \mathcal{F}_x(u)$

$$= \frac{1}{RC} \cdot \mathcal{F}\left(e^{-t/RC} \cdot 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(t)\right) \cdot \mathcal{F}_x(u)$$

d'après le formulaire

posons $\boxed{h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-t/RC} \cdot 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(t)}$

d'où $\mathcal{F}_v(u) = \mathcal{F}_x(u) \times \mathcal{F}_h(u) = \mathcal{F}(x(t) * h(t))$

d'où $\boxed{v(t) = x(t) * h(t)}$

Exercice 4 : 4 points

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\boxed{|x|<1 \iff -1<x<1}$!!

2 a) Montrer que sa T.F est donnée par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_f(u) = \dfrac{-2\pi u \cdot \cos(2\pi u) + \sin(2\pi u)}{2\pi^3 u^3} & \text{si } u \neq 0 \\ \mathcal{F}_f(0) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

On a $f(x) = 1-x^2$ si $-1<x<1$

f est donc paire $f(x) = f(-x), \forall x \in]-1,1[$

d'où : $\mathcal{F}_f(u) = 2\int_0^1 (1-x^2)\cdot\cos(2\pi u x)\,dx$

car f nulle sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

$$= 2\left[(1-x^2)\cdot\frac{\sin(2\pi u x)}{2\pi u}\right]_{x=0}^{x=1} - 2\int_0^1 -2x\cdot\frac{\sin(2\pi u x)}{2\pi u}$$

$$= 2(0-0) + 4\int_0^1 x\cdot\frac{\sin(2\pi u x)}{2\pi u}\,dx$$

$$= \frac{4}{2\pi u}\cdot\left(\left[x\cdot\frac{-\cos(2\pi u x)}{2\pi u}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{-\cos(2\pi u x)}{2\pi u}\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi u}\cdot\left(\frac{-\cos(2\pi u)}{2\pi u} - 0 + \frac{1}{2\pi u}\left[\frac{\sin(2\pi u x)}{2\pi u}\right]_{x=0}^{x=1}\right)$$

$$= \frac{2}{(2\pi u)^2}\left(-\cos(2\pi u) + \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u} - 0\right)$$

$$\boxed{\mathcal{F}_f(u) = \frac{-2\pi u\cdot\cos(2\pi u) + \sin(2\pi u)}{2\pi^3 u^3}}$$

et $\mathcal{F}_f(0) = 2\int_0^1 (1-x^2) \cdot 1\, dx \quad (\cos 0 = 1)$

$$= 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}$$

d'où : $\boxed{\mathcal{F}_f(0) = \frac{4}{3}}$

2 b) Déduire de ce qui précède le calcul de cette famille d'intégrales :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{u\cos u - \sin u}{u^3} \cdot \cos(ux)\, du = -\frac{\pi}{4} f(x)$$

On sait que $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}_f(u)\right)(x) = f(-x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

et on peut remarquer de la question a) que $\boxed{\mathcal{F}_f(u) \text{ est paire}}$

d'où : $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}_f(u)\right)(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{-2\pi u \cdot \cos(2\pi u) + \sin(2\pi u)}{2(\pi u)^3} \cdot \cos(2\pi u x)\, du$

On pose $v := 2\pi u$, d'où $dv = 2\pi\, du$ et $(\pi u)^3 = \left(\frac{v}{2}\right)^3 = \frac{v^3}{8}$

d'où $f(-x) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}_f(u)\right)(x) = -\frac{8}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{v\cos v - \sin v}{v^3} \cdot \cos(vx)\, dv$

$f(-x) = f(x)$ car $\underline{f \text{ est paire}}$,

d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{v\cos v - \sin v}{v^3} \cdot \cos(vx)\, dv = -\frac{\pi}{4} f(x) \ ; \forall x \in \mathbb{R}$$

On renomme la variable v en u $(u \leftrightarrow v)$, d'où :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{u\cos u - \sin u}{u^3} \cdot \cos(ux)\, du = -\frac{\pi}{4} f(x) ; \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$