Université Internationale de Casablanca 02 janvier 2020

Pr. Morad Lakhssassi **MATHEMATIQUES APPLIQUEES** TC-ING

CONTROLE CONTINU – Durée 2h

Consignes :

1- **NON AUTORISES : Documents et Téléphone**
2- **AUTORISES : Uniquement les 3 pages de formulaires fournies par le professeur**
3- ***Justifiez*** *vos réponses (un minimum).*
4- ***Un point*** *est consacré à la présentation des copies, leur numérotation et à la marge d'au moins 2cm laissée à gauche de chaque page. L'étudiant peut commencer par n'importe quel exercice.*

Exercice 1 : 6 points

a) Résoudre sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$ à définir l'EDO suivante : $y' = y^2$

b) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation suivante en utilisant le changement de variable $x = cos(t)$:

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = arccos(x)$$

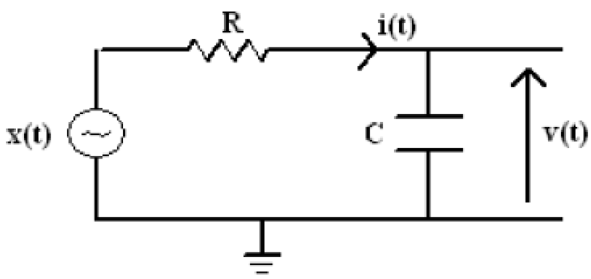
Rappel : $\forall\, x \in\,]-1,1[,\ \ arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 2 : 4 points

La fonction triangle Λ est définie dans votre formulaire. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes : a) $t \longmapsto \Lambda(\mathrm{t}-5)$ b) $t \longmapsto t.\Lambda(\mathrm{t})$

Exercice 3 : 5 points

On considère le système constitué d'un générateur basse fréquence fournissant une tension d'entrée $x(t)$, d'une résistance R et d'un condensateurde capacité C. Le signal de sortie que l'on étudie est la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur.



On rappelle que la charge $q(t)$ du condensateur vaut $C.v(t)$ et que l'intensité dans le circuit est donnée par $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$. Les tensions vérifient l'égalité $x(t) = v(t) + R.i(t)$

a) Donner l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

b) Appliquer la tranformée de Fourier à cette équation.

c) En déduire $v(t)$.

Exercice 4 : 4 points

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & si\ \ |x| < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

a) Montrer que sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}f(u) = \dfrac{-2\pi u.\cos(2\pi u) + \sin(2\pi u)}{2\pi^3 u^3} & si\ u \neq 0 \\ \mathcal{F}f(0) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

b) Déduire de ce qui précède le calcul de cette famille d'intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ucos(u) - \sin(u)}{u^3} \cos(ux)\, du = -\frac{\pi}{4} f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bon courage !