

CONTROLE CONTINU – Durée 2h

3 PAGES DE RESUME fournies par le professeur sont AUTORISES

0,5 points	<ul style="list-style-type: none"> • Laissez une MARGE de 2 cm à GAUCHE • Inscrivez votre GROUPE
0,5 points	<ul style="list-style-type: none"> • Soignez l'écriture • NUMEROTEZ vos feuilles doubles

Justifiez vos réponses !

Exercice 1 :

Résoudre sur un intervalle I dans \mathbb{R} à définir :

$$x^2 y' = e^{-y}$$

Exercice 2 :

La fonction porte Π est définie dans votre formulaire.

Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

- a) $t \rightarrow \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$ b) $t \rightarrow t \cdot \Pi(t)$ c) $t \rightarrow t^2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{a}\right)$ où $a \neq 0$

Exercice 3 :

Soit $\alpha > 0$. La transformée de Fourier de la fonction $t \rightarrow e^{-at^2}$ est donnée par $\mathcal{F}(e^{-at^2})(u) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} u^2}$

Pour $a > 0$, soit la fonction f_a définie sur \mathbb{R} par $f_a(x) = \frac{1}{a} e^{-a^2 x^2}$.

Question : Pour $b > 0$, calculer $f_a * f_b$.

Exercice 4 :

Soit g la fonction représentée par la figure 1.

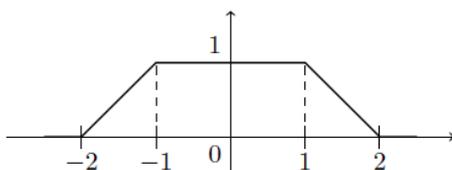


FIGURE 1 – Graphe de la fonction g

- a) Exprimer la fonction g en fonction de la fonction triangle Λ dont la formule est exprimée dans formulaire Transformée de Fourier.
- b) A l'aide de la transformée de Fourier de la fonction triangle, calculer la transformée de Fourier de g .

Exercice 5 :

On cherche une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ et solution de l'EDO : $-y'' + y = e^{-2|x|}$

- a) Montrer que si f vérifie cette équation, alors :

$$\mathcal{F}f(u) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{1 + 4\pi^2 u^2} - \frac{1}{4 + 4\pi^2 u^2} \right)$$

- b) En déduire $f(x)$.