La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. (2 pts)

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Le contrôle continu est composé d'une page, de trois exercices indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du contrôle : 1h30 – Exercice 1 (6 points), Exercice 2 (6 points) et Exercice 3 (6 points) = Bon Travail =

Exercice 1

On rappelle que la fonction indicatrice χ est définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit les fonctions f et g par

$$\begin{cases} \mathbf{f(x) = e^{-x}}\, \chi_{[0,+\infty[}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g(x) = e^{x}}\, \chi_{]-\infty,0]}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier de f et celle de g.
2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 t^2}\,\mathbf{dt}.$$

Exercice 2

1. Montrer qu'il existe trois constantes a, b et c tels que :

$$\frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p^2+5p+4)} = \frac{a}{p+2} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+4}$$

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}} \\ \mathbf{y(0) = 1} \\ \mathbf{y'(0) = 0} \end{cases}$$

Résoudre cett équation différentielle à l'aide de la transformée de Laplace.

Exercice 3

1. Montrer qu'il existe six constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ et λ tels que :

$$\frac{p^4+4p^3-2p-2}{(p+1)(p^2-4)p^3} = \frac{\alpha}{p+2} + \frac{\beta}{p-2} + \frac{\gamma}{p+1} + \frac{\delta}{p} + \frac{\mu}{p^2} + \frac{\lambda}{p^3}$$

2. En déduire la solution de l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \mathbf{y''(t) - 4y(t) = 3e^{-t} - t^2} \\ \mathbf{y(0) = 0} \\ \mathbf{y'(0) = 1} \end{cases}$$

Pr:Hamid E