Exercice 1-(7 points)

On cherche à résoudre l'équation

$$e^x - 3x^2 = 0$$

Qui possède les deux racines r_1= -0,458963 et r_2= 0,91 ainsi qu'une troisième racine situé près de x=4. On vous propose les méthodes des points fixes suivantes pour obtenir r_1 :

- $X = g_1(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{3}}$;
- $X = g_2(x) = -\left(\frac{e^x - 3\,x^2 - 3.385712869x}{3.385712869} \right)$;
- $X = g_3(x) = -\left(\frac{e^x - 3\,x^2 - 3.76189x}{3.76189} \right)$;

a) Lesquelles, parmi ces trois méthodes des points fixes, sont susceptibles de congverger vers r_1 .

b) Déterminer celle qui produit une convergence quadratique vers r_1.

c) La méthode de Newton est utilisée pour résoudre l'équation f(x)=0 est donnée par

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

En écrivant la suite sous la forme d'un problème de point fixe, résumer les résultats de cours en donnant le taux de convergence et l'ordre de la méthode selon la nature de la racine (simple ou multiple).

d) Application : Dans cette application, nous analysons le comportement de la méthode de Newton pour trouver la racine r =1 de la fonction :

$$f(x) = x^5 - 3\,x^4 + 4\,x^3 - 4\,x^2 + 3x - 1$$

Le script MATLAB suivant a permis d'obtenir les résultats présentés ci-bas.

```
[x,err] = newton('fonc','dfonc',1.20,20,1.0e-4);
ratio1 = err(2:end-1)./err(1:end-2);
ratio2 = err(2:end-1)./err(1:end-2).^2;
exout()
```

La fonction exout() permet d'afficher, dans un tableau de deux colonnes, les valeurs des vecteurs $ratio1$ et $ratio2$.

ratio1	ratio2
6.8695e-01	3.4373e+00
6.8081e-01	4.9590e+00
6.7620e-01	7.2347e+00
6.7278e-01	1.0645e+01
6.7018e-01	1.5761e+01
6.6809e-01	2.3445e+01
6.6619e-01	3.4992e+01
6.6418e-01	5.2368e+01
6.6173e-01	7.8555e+01
6.5839e-01	1.1811e+02
6.5355e-01	1.7808e+02
6.4622e-01	2.6942e+02

Déterminer l'ordre de la convergence de la méthode de Newton à l'aide des résultats présentés dans le tableau et en déduire la nature de la racine r=1

Exercice 2 – 5 points

On veut calculer une racine double par la méthode de Newton modifiée qui donnera un meilleur ordre de convergence en utilisant l'algorithme suivant:

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Le tableau suivant, donne les résultats respectifs obtenus à l'aide de la méthode de Newton ordinaire et de la méthode modifiée pour la fonction

$$f(x) = (x-1)^2 e^x.$$

	x_n	
n	Newton	Newton modifée
0	0,250 000 000	0,250 000 000
1	0,850 000 000	1,450 000 000
2	0,931 081 081	1,082 653 061
3	0,966 770 374	1,003 280 205
4	0,983 665 903	1,000 005 371
5	0,919 900 201	1,000 000 000
6	0,995 966 569	
7	0,997 987 369	
8	0,989 994 694	
9	0,999 497 600	
10	0,999 748 863	
11	0,999 874 447	
12	0,999 937 228	
13	0,999 968 615	
14	0,999 984 308	
15	0,999 992 154	
16	0,999 996 077	
17	0,999 998 038	
18	0,999 999 019	

(a) Quelle est la multiplicité de la racine $r = 1$ de $f(x)$?

(b) À l'aide de ces résultats numériques, vérifier que la convergence de la méthode de Newton ordinaire est linéaire.

(c) Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton modifiée?

(d) La méthode de bissection serait-elle plus rapide ou moins rapide que la méthode de Newton ordinaire pour trouver cette racine?

Exercice 3- (3 points).

Si on a une racine de multiplicité m, comment modifier la méthode de Newton pour avoir une convergence d'ordre 2. Justifier votre réponse.

Exercice 4 - (5 points).

On considère le système non-linéaire

$$\begin{cases} ye^x - 2 = 0; \\ y + x^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

a) Faire deux itérations de Newton pour résoudre le système non linéaire.
b) Est -il possible de prendre l'approximation initiale $(x^0,y^0)= (1,2)$