Exercice 1 (4 points)

a) Résoudre le système par la décomposition L U

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - X_3 = \sqrt{2} \\ 4X_1 + 4X_2 - 3X_3 = 0 \\ -2X_1 + 3X_2 - X_3 = 2 \end{cases}$$

b) Calculer le conditionnement de la matrice du système ? Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 2 (6 points)

Le point fixe $r = 3$ est solution des deux équations:

$$x = g_1(x) = \sqrt{2x+3};$$
$$x = g_2(x) = \frac{(x^2-3)}{2}.$$

(a) Déterminer la nature du point fixe r (répulsif, attractif ou indeterminé) pour chacune des fonctions g_1 et g_2.

(b) Trouver les valeurs de α et β telles que la combinaison linéaire

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x),$$

possède $r = 3$ comme point fixe super-attractif, c'est à dire de convergence au moins quadratique.

(c) Effectuer deux itérations de la méthode des points fixes sur la fonction $g_{\alpha,\beta}$ en partant de $x_0 = 4$.

(d) Si deux fonctions conduisent l'une à un point fixe attractif et l'autre au même point fixe répulsif, peut-on toujours les combiner afin d'obtenir une méthode des points fixes convergente au moins à l'ordre 2? Justifier.

Exercice 3 (6points)

a) Faire un rappel sur la résolution numérique par la méthode de Newton d'un système

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

b) Chercher graphiquement une solution du

$$\begin{cases} y - e^x = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

Faire deux itérations de la méthode de Newton

Exercice 4 (4 points)

a) A l'aide de la méthode de Newton, montrer comment on obtient l'algorithme

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{N}{X_n}\right)$$

Pour le calcul de $\sqrt{N}$

b) Obtenir un algorithme similaire pour calculer $\sqrt[3]{N}$