Examen en Analyse numérique

Durée (2 h : 00 mn)

Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

LAUREATE SOMED EDUCATION HOLDING • Zénith Millénium, Bâtiment 6, Lot Attawfiq, Sidi Mâarouf Casablanca • Tél : 05 29 02 37 00 • Fax : 05 22 78 61 04

Capital social: 111, 830,000.00 dhs • Taxe professionnelle 37983111 • N°RC 214245 • N°IF 40192279

| www.uic.ac.ma |

EXERCICE 1 :

Le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{12} \\ \frac{77}{60} \\ \frac{57}{60} \\ \frac{319}{420} \end{pmatrix}$$

possède la solution exacte $\vec{x} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$. En utilisant l'arithmétique flottante à 3 chiffres, on a résolu le système pour obtenir l'approximation $\vec{x^*} = (1,11 \quad 0,228 \quad 1,95 \quad 0,797)^T$.

Sachant que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix}$$

Calculer l'erreur relative en utilisant la norme $\| \|_\infty$ et expliquer pourquoi les résultats sont si mauvais.

EXRCICE 2 :

L'équation $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ possède une seule racine dans l'intervalle $[1, 2]$. On peut obtenir différents problèmes de points fixes de cette équation:

- $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$;
- $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}}$;
- $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$;
- $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4 + x}\right)^{\frac{1}{2}}$;
- $x = g_5(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}$.

L'algorithme des points fixes nous donne les résultats suivants:

n	g1(xn)	g2(xn)	g3(xn)	g4(xn)	g5(xn)
0	1.5000000000E+00	1.5000000000E+00	1.5000000000E+00	1.5000000000E+00	1.5000000000E+00
1	-8.7500000000E-01	8.1649658093E-01	1.2869537676E+00	1.3483997249E+00	1.3733333333E+00
2	6.7324218750E+00	2.9969088058E+00	1.4025408035E+00	1.3673763720E+00	1.3652620149E+00
3	-4.6972001200E+02	NaN	1.3454583740E+00	1.3649570154E+00	1.3652300139E+00
4	1.0275455519E+08		1.3751702528E+00	1.3652647481E+00	1.3652300134E+00
5	-1.0849338705E+24		1.3600941928E+00	1.3652255942E+00	1.3652300134E+00
6	1.2770555914E+72		1.3678469676E+00	1.3652305757E+00	
7			1.3638870039E+00	1.3652299419E+00	
8			1.3659167334E+00	1.3652300225E+00	
9			1.3648782172E+00	1.3652300123E+00	
10			1.3654100612E+00	1.3652300136E+00	
15			1.3652236802E+00	1.3652300134E+00	
20			1.3652302362E+00		
25			1.3652300056E+00		
30			1.3652300137E+00		

(a) Expliquer pourquoi on n'a pas eu convergenge avec la méthode des points fixes associée à $g_1(x)$ mais que la fonction $g_3(x)$ nous a donné un algorithme convergent.

(b) Que s'est-il passé avec $g_2(x)$?

(c) *i)* Expliquer pourquoi $g_3(x)$ a mené à une méthode des points fixes qui a convergée moins vite que $g_4(x)$.

ii) Expliquer pourquoi $g_4(x)$ a mené à une méthode des points fixes qui a convergée moins vite que $g_5(x)$.

(d) Donner l'ordre de convergence des méthodes des points fixes associées à $g_3(x)$, $g_4(x)$ et $g_5(x)$.

(e) Trouver la racine par **la méthode de Newton** et rappeler l'ordre de convergence de la méthode.

EXERCICE 3 :

LAUREATE SOMED EDUCATION HOLDING • Zénith Millénium, Bâtiment 6, Lot Attawfiq, Sidi Mâarouf Casablanca • Tél : 05 29 02 37 00 • Fax : 05 22 78 61 04
Capital social: 111, 830,000.00 dhs • Taxe professionnelle 37983111 • N°RC 214245 • N°IF 40192279
| www.uic.ac.ma |

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer la décomposition LU de A par la méthode de Doolitle sans permutation de lignes.
N.B.: Le calcul de chaque coefficient de cette matrice doit être indiqué clairement et en détail.

(b) Sans calculer de déterminant, comment savez-vous que A n'est pas singulière ?

(c) L'inverse de A est une matrice telle que $AA^{-1} = I$. Si le vecteur $\vec{c}_i$ représente la i^{ieme} colonne de A^{-1}, expliquer comment trouver A^{-1} sur base de L et U. Écrire les systèmes linéaires qui correspondent.

(d) Pour une matrice $n \times n$, sachant que le nombre d'opérations à effectuer pour calculer L et U est environ $\frac{1}{3}n^3$ et que celui des résolutions $L\vec{y} = \vec{b}$ puis $U\vec{x} = \vec{y}$ est environ n^2, quel est le coût du calcul de A^{-1} par la méthode que vous avez décrite ?

Aide mémoire d'analyse numérique

A. Ramadane, Ph.D.

Équations algébriques non linéaires

- Problème « de racine »: chercher r t.q. $f(r) = 0$
- Borne supérieure de l'erreur pour la méthode de la bissection: $|x_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n}$
- Problème de point fixe: chercher r t.q. $r = g(r)$
- Algorithme de point fixe: pour x_0 donné, $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Développement pour l'analyse de convergence de la méthode de points fixes:

$$e_{n+1} := x_{n+1} - r = g'(r)e_n + \tfrac{1}{2}g''(r)e_n^2 + \tfrac{1}{6}g'''(r)e_n^3 + \cdots$$

- Méthode de Newton: pour x_0 donné,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Une racine r de la fonction $f(x)$ est de *multiplicité* m si $f(x) = (x-r)^m h(x)$ pour une fonction $h(x)$ qui vérifie $h(r) \neq 0$ ou encore si:

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(r) \neq 0$$

- Taux de convergence de la méthode de Newton dans le cas d'une racine de *multiplicité* m: $1 - \frac{1}{m}$

Systèmes d'équations algébriques

- La factorisation matricielle de Crout:

$$A = LU = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \ddots & \vdots \\ \ell_{31} & l_{32} & \ell_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn-1} & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La résolution des systèmes linéaires:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow LU\vec{x} = P\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ)\, L\vec{y} = P\vec{b}; \\ 2^\circ)\, U\vec{x} = \vec{y}. \end{cases}$$

Note: On peut utiliser le vecteur de permutation $\vec{O}$ plutôt que la matrice de permutation P.

- Normes vectorielles:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad \|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$$

- Normes matricielles:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

- Conditionnement matriciel: $\operatorname{cond} A = \|A\| \|A^{-1}\|$
- Bornes de l'erreur: pour le résidu $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}^*$ et la perturbation E sur la matrice A,

$$\frac{1}{\operatorname{cond} A} \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \leq \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|}{\|\vec{x}\|} \leq \operatorname{cond} A \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \qquad \text{et} \qquad \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|}{\|\vec{x}^*\|} \leq \operatorname{cond} A \frac{\|E\|}{\|A\|}$$

- Matrice à diagonale strictement dominante A:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- La méthode de Newton: pour $\vec{x}^k$ donné, résoudre

$$J(\vec{x}^k)\vec{\delta}x = -\vec{R}(\vec{x}^k) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}^k) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}^k) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}^k) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^k) \\ f_2(\vec{x}^k) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^k) \end{pmatrix}$$

puis $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \vec{\delta}x$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$