L'ÉCOLE D'INGENIERIE : G.MEC/G.IND
LUNDI 13/01/ 2020
Durée 1H50MN

Université Internationale de Casablanca

EXAMEN FINAL : METHODE DES ELEMENTS FINIS

Directives :
- Tout document est interdit.
- Les calculatrices programmables, les correcteurs et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.
- Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction lors de la correction.

Problème 1. (59%)

L'équation de Korteweg-deVries (KdV) est un modèle mathématique pour les vagues en faible profondeur. On considère le problème aux limites de (KdV) linéarisé suivant :

$$(\text{KdV})\begin{cases} a\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)+b\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)+c\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)=f(x,t), \quad x\in(-2,3),\\ u(-2,t)=0,\ u(3,t)=0. \quad t>0\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}$$

Où a, b et c sont des constantes et f est une fonction.

1) Soit $\Delta t=\frac{T}{M}$ le pas de temps. On note par t_m l'instant $t_m=m\Delta t$. On approche la dérivée en temps par un schéma décentré arrière. Écrire le nouveau problème qu'on notera $(KdV1)$.
2) Etablir la formulation faible de $(KdV1)$.
3) On désire calculer une approximation de u en utilisant la méthode des éléments finis de Lagrange. On note cette approximation u_h. Pour cela, on propose les deux maillages (en espace) suivants :

$$\text{Maillage } 1 := \left\{X_1=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 3\end{bmatrix}' \text{ et } T_1=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{Maillage } 2 := \left\{X_2=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 3\end{bmatrix}' \text{ et } T_2=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\right\}$$

et la numérotation locale est de droite à gauche. Choisir un maillage et définir votre espace éléments finis V_h. On utilise quel type d'élément fini ? Justifier **toutes** les réponses.
4) Etablir la formulation faible discrète de $(KdV\,1)$ et présenter le système matriciel correspondant. Le calcul est-t-il explicite ? justifier les réponses.

On désire retrouver les matrices globales de la question (4) moyennant la technique d'assemblage. Soient M, N et K les matrices globales qui correspondent, respectivement, aux termes en a, en b et en c dans la formulation faible discrète.

5) Donner toutes les matrices élémentaires $elmK_k^n$, $elmM_k^n$, $elmN_k^n$ et tous les vecteurs second membre $elmF_k^n$ (A ne pas calculer numériquement).
6) Calculer le coefficient $(elmK_1)_{21}$. Préciser toutes les étapes du calcul.

7) Présenter le système linéaire résultant (en imposant les conditions aux limites) et préciser l'emplacement de $(elmK_1)_{21}$ dans la matrice globale. (A ne pas calculer numériquement K, M et F).

Problème 2. (41%)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et on considère le problème suivant :

$$(PL_2)\begin{cases} -div(K \cdot \nabla u(x,y)) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = h(x), & (x,y) \in \partial\Omega_1, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}} = g(x,y) & (x,y) \in \partial\Omega_2, \end{cases}$$

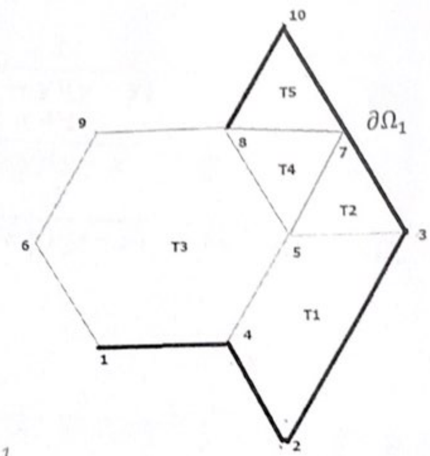

Figure 1

où $h(x)$, $f(x,y)$ et $g(x,y)$ sont des fonctions données, $K = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, et $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$.

A. Etablir la formulation variationnelle de ce problème dans un espace fonctionnel H à préciser.

B. Dans cette partie, on prend $a = 1, b = 0$, $g(x,y) = 0$ et on discrétise le problème en utilisant la méthode des éléments finis. Le domaine Ω et le maillage sont présentés sur la figure 1.

1) On utilise quel type d'éléments finis ? justifier la réponse.
2) Déterminer le nombre des inconnues de ce problème. Justifier la réponse.
3) Donner toutes les matrices élémentaires $elmK_k$ et tous les vecteurs second membre $elmF_k$. (A ne pas les calculer numériquement).
4) Etablir la matrice de rigidité globale K et le vecteur second membre F, en imposant les conditions aux limites.

On donne :

1-

$$\int_{\Omega} v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx = -\int_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)u(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\,n_i(x)ds$$

2-

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{yz}{(z-x)(x-y)} & -\dfrac{xz}{(x-y)(y-z)} & -\dfrac{xy}{(y-z)(z-x)} \\ \dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)} & \dfrac{x+z}{(x-y)(y-z)} & \dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)} \\ -\dfrac{1}{(z-x)(x-y)} & -\dfrac{1}{(x-y)(y-z)} & -\dfrac{1}{(y-z)(z-x)} \end{pmatrix}$$

3-

$$\begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(a-d)(a-b)(a-c)} & -\dfrac{1}{(b-d)(b-c)(a-b)} & \dfrac{1}{(c-d)(b-c)(a-c)} & -\dfrac{1}{(c-d)(b-d)(a-d)} \\ \dfrac{-b-c-d}{(a-d)(a-b)(a-c)} & \dfrac{a+c+d}{(b-d)(b-c)(a-b)} & \dfrac{-a-d-b}{(c-d)(b-c)(a-c)} & \dfrac{a+c+b}{(c-d)(b-d)(a-d)} \\ \dfrac{(c+d)b+cd}{(a-d)(a-b)(a-c)} & \dfrac{(-c-d)a-cd}{(b-d)(b-c)(a-b)} & \dfrac{(d+b)a+bd}{(c-d)(b-c)(a-c)} & \dfrac{(-c-b)a-bc}{(c-d)(b-d)(a-d)} \\ -\dfrac{bcd}{(a-d)(a-b)(a-c)} & \dfrac{acd}{(b-d)(b-c)(a-b)} & -\dfrac{abd}{(c-d)(b-c)(a-c)} & \dfrac{abc}{(c-d)(b-d)(a-d)} \end{bmatrix}$$

4-

n	Points d'intégration t_i	Poids d'intégration w_i	Degré de précision
1	0	2	1
2	−0.577 350 269	1	3
	+0.577 350 269	1	
3	−0.774 596 669	0.555 555 556	5
	0.0	0.888 888 889	
	+0.774 596 669	0.555 555 556	
4	−0.861 136 312	0.347 854 845	7
	−0.339 981 044	0.652 145 155	
	+0.339 981 044	0.652 145 155	
	+0.861 136 312	0.347 854 845	
5	−0.906 179 846	0.236 926 885	9
	−0.538 469 310	0.478 628 670	
	0.0	0.568 888 889	
	+0.538 469 310	0.478 628 670	
	+0.906 179 846	0.236 926 885	