

EXAMEN :
METHODE DES ELEMENTS FINIS
(01 FEVRIER 2018)

Directives :

- Tout document est interdit.
- Les calculatrices programmables, les correcteurs et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.
- Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction lors de la correction.

Problème 1. (56%)

On considère le problème aux limites suivants :

$$(PL_1) \begin{cases} (\alpha(x)u'(x))' = f(x), & x \in (0,3), \\ u(0) = 0, \quad u'(3) = 1. \end{cases}$$

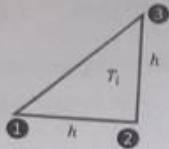
Où f et α sont deux fonctions.

- 1) Etablir la formulation faible de (PL_1) .
- 2) On désire calculer une approximation de u en utilisant la méthode des éléments finis. On note cette approximation u_h . Pour cela, on considère le maillage suivant :

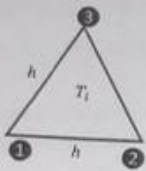
$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tracer ce maillage. On utilise quel type des éléments finis ? justifier la réponse.

- 3) Etablir la formulation faible discrète de (PL_1) dans l'espace des éléments finis V_h à préciser.
- 4) Donner toutes les matrices élémentaires $elmK_i$ et tous les vecteur second membre $elmF_i$. (Ne pas les calculer numériquement).
- 5) Présenter la matrice globale K_1 et le vecteur second membre F_1 après assemblage des $elmK_i$ et $elmF_i$. (Ne pas calculer numériquement K_1 et F_1).
- 6) Présenter le système linéaire résultant ; la matrice globale K et le vecteur second membre F en imposant les conditions aux limites aux K_1 et F_1 . (Ne pas calculer numériquement K et F).
- 7) Calculer la fonction de forme φ_3 .



$$K_i = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_i = \frac{fh^2\sqrt{3}}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$K_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_i = \frac{fh^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On donne :

1-

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{yz}{(z-x)(x-y)} & \frac{xz}{(x-y)(y-z)} & -\frac{xy}{(y-z)(z-x)} \\ \frac{y+z}{(z-x)(x-y)} & \frac{x+z}{(x-y)(y-z)} & \frac{x+y}{(y-z)(z-x)} \\ \frac{1}{(z-x)(x-y)} & \frac{1}{(x-y)(y-z)} & \frac{1}{(y-z)(z-x)} \end{pmatrix}$$

2-

n	Points d'intégration t_i	Poids d'intégration w_i	Degré de précision
1	0	2	1
2	-0.577 350 269 +0.577 350 269	1 1	3
3	-0.774 596 669 0.0 +0.774 596 669	0.555 555 556 0.888 888 889 0.555 555 556	5
4	-0.861 136 312 -0.339 981 044 +0.339 981 044 +0.861 136 312	0.347 854 845 0.652 145 155 0.652 145 155 0.347 854 845	7
5	-0.906 179 846 -0.538 469 310 0.0 +0.538 469 310 +0.906 179 846	0.236 926 885 0.478 628 670 0.568 888 889 0.478 628 670 0.236 926 885	9

Dans cette question, on prend $\alpha(x) = x$. Calculer numériquement, le coefficient $K_{3,1}$ de la matrice K .

Problème 2. (44%)

Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega_1, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega_2. \end{cases}$$

Où f est une constante et $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$.

- Etablir la formulation variationnelle de ce problème
- Dans cette partie, on discrétise le problème en utilisant les éléments finis linéaires. Le domaine Ω et le maillage sont présentés comme suit :

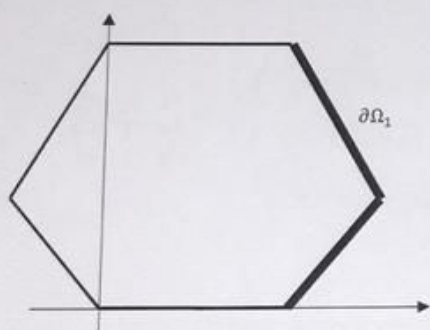


Figure 1 : Le domaine Ω et la partie du bord $\partial\Omega_1$

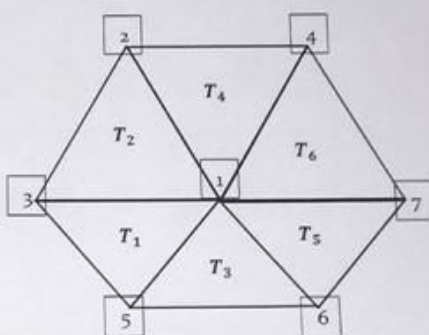


Figure 2 : Triangulation P_1 du domaine Ω

Où les éléments T_1, T_3 et T_5 sont des triangles rectangles et les éléments T_2, T_4 et T_6 sont des triangles équilatéraux.

- Déterminer le nombre des inconnues de ce problème. Justifier la réponse.
- Etablir la matrice de rigidité globale K et le vecteur second membre F , sans les conditions aux limites.
- Etablir la matrice de rigidité globale K et le vecteur second membre F , en imposant les conditions aux limites.

A noter que pour un élément linéaire, la matrice locale K_l et le second membre local F_l sont donnés par :