Université Internationale de Casablanca

CPI2-S4 : ANALYSE 4,
EXAMEN FINAL
2 juin 2017

Pr. H. EL AMRI

Exercice 1

Donner la représentation graphique de A et calculer l'intégrale $I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$ et $f(x,y) = x + y$
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le y,\ 1 \le y \le 2\}$ et $f(x,y) = y \exp\left(\frac{x}{y}\right)$

Exercice 2

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\iint_D x^y\,dx\,dy$ avec $D = [0,1] \times [a,b]$, $b > a > 0$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$.

Exercice 3

Déterminer la représentation graphique de A et calculer son aire dans les cas suivants :

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x+y| \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 - 2y \ge 0,\ x^2 + y^2 - 1 \le 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

Exercice 4

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et dans ce cas, les intégrer :

1. $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$

Exercice 5

Soit ω la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$

1. Montrer que ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire l'intégrale curviligne le long du demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$ de $A(1,2)$ vers $B(3,4)$.

Exercice 6

On considère le champ vectoriel

$$V(x,y) = (1 + 2xy, x^3 - 3).$$

Ce champ est-il un champ de gradient ? (c'est à dire, existe t-il un potentiel f tel que $\nabla f = V$?)

Exercice 7

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x,y) = (3x, x+y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct (sens des aiguilles d'une montre).