Université Internationale de Casablanca

CPI2 : Analyse 4. Contrôle N° 1,
Vendredi 20 avril 2018, 14h-16h.

Exercice 1. *Soit g définie par*

$$g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

1. *Déterminer le domaine de définition de g*
2. *Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$*

On pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$*
2. *Montrer que f possède en $(0,0)$ des dérivées dans toutes les directions*
3. *Montrer que f n'est pas dérivable en $(0,0)$.*

Exercice 2. *Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes et donner leur nature :*

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Exercice 3. *(Peano) Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{2}$$

1. *Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ et en déduire que f est continue en $(0,0)$*
2. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$*
3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$*
4. *Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$*
5. *Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$*

Exercice 4. *Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci dessous, au point (x_0, y_0, z_0) donné*

1. $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3)$
2. $z = \sin(\pi xy) e^{2x^2 y - 1}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, \frac{1}{2}, 1)$