Examen d'Analyse 3 :

CPI 2

Durée : 2h

Exercice 1 :

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = Arc\sin(\frac{n^2+1}{n^2})$ 2. $u_n = \frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n}$ 3. $u_n = (\frac{n+1}{2n+2})^n$

4. $u_n = \frac{n}{(n^2+1)(n+2)}$ 5. $u_n = (\sin(\frac{1}{n}))^3$ 6. $u_n = (-1)^n e^{-n}$

Exercice 2 :

Soit f continue décroissante sur $[0, +\infty[$ telle que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1. Etudier la série de terme général $(n \geq 0)$

   $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)dt$

2. Cas particulier :

   $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)dt \quad (n \geq 1)$.

Exercice 3 :

Soit le signal périodique de période 2π défini par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Enoncer le théorème de Dirichlet.
2. Enoncer le théorème de Parseval.
3. Calculer les coefficients de Fourier du signal f.
4. Déterminer la série de Fourier du signal f.
5. En déduire la somme des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
6. En appliquant l'égalité de Parseval, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 4 :

On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = 0,\ y(0) = 1\ (E)$.

Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la solution de (E) où $(a_n)_n$ une suite de nombres réels.

1. Trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite $(a_n)_n$;
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n ;
3. Reconnaître $y(x)$.

Bonne chance