Examen en Analyse 3

Durée (2 h : 00 mn)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice (3 points):

Estimer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{1}{1+x^{100}}\,dx$$

avec une garantie que l'erreur commise est moindre que 10^{-100}

Problème -1 - (7 points):

Soit f une fonction ayant les propriétés suivantes :

$f(1) = 1$

$f^{(n)}(1) = \frac{n!}{3^n}$ pour tout $n \geq 1$ et

$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{3(n!)}{2^{n+1}}$ pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0,2]$.

En utilisant ces propriétés, répondre aux questions suivantes :

a) Donner la série de Taylor $S(x)$ de f centrée en a=1.

b) Donner le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de $S(x)$.

c) Si on veut approximer $f(x)$ sur l'intervalle [0,2] par son polynôme de Taylor $T_n(x)$ de degré n, avec une erreur d'au plus de 0.03, quel degré n doit-on choisir ?

d) Montrer que $f(x) = S(x)$ sur l'intervalle [0,2].

e) Sachant que $f(3/2)= 6/5$, calculer la somme :

$$1+\frac{1}{3}.\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}.\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}.\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}.\frac{1}{2^4}+\dots$$

Problème- 2- (7 points):

On considère la fonction

$$f(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(t)}{t-\pi}\, dt$$

a) Donner la série de Taylor de f, notée T(x), autour de $a = \pi$.

b) Donner le rayon de convergence R et l'intervalle de convergence I de T(x).

c) Est-ce que T(x) permet d'estimer $f(2\pi)$, Justifier.

d) Soit $P_n(x)$ le polynôme de Taylor de degré n de f autour de $a= \pi$. Utiliser l'analyse de Taylor pour déterminer une borne supérieure sur l'approximation de f par $P_n(x)$ dans un intervalle quelconque J contenant π

e) Est-ce que $P_n(x)$ converge vers f(x) pour tout $x \in I$?

f) En utilisant T(x), évaluer $f(2\pi)$ avec une précision de 6/10

Exercice 4 (3 points):

On considère la fonction

$$f(x) = \ln(1+x)$$

a) Donner la série de Taylor de autour de f(x) autour de a = 0. Spécifier $f^{(n)}(0)$

b) Pour la série T(x) obtenue en a), donner l'intervalle et le rayon de convergence.

c) Considérons que $x \in [-0.5, 0.5]$

Calculer $\lim_{n\to\infty} |P_n(x) - f(x)|$ où $P_n(x)$ est le polynôme de Taylor de degré n de f(x) autour de a =0. Qu'en concluez –vous ?