Contrôle n°1 d'Analyse 3 :

CPI 2

Durée : 2h

Exercice 1 :

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
3. $u_n = n\sin(1/n)$
4. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$

Exercice 2 :

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 3 :

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1. Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Quelle est la nature de la suite (S_n) ?

Exercice 4 :

Sachant que $e = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}$, $n^2 = n(n-1)+n$ et $n^3 = n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}$.

Exercice 5 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = x - e^x + \cos x$;
2. $y' - y = (x+1)e^x$;
3. $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$;
4. $y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$.

Exercice 6 :

Résoudre l' équations différentielle suivante :

$$y'' + 2my' + \omega_0^2 y = A\cos(\omega x)$$

avec m , ω_0 , A , ω des paramètres strictement positifs.

Bonne chance