# Contrôle en Analyse 3

Durée (2 h : 00 mn)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

1. **Exercice (8 points)**

**a.** Rappeler les tests de comparaison (deux tests) et faire une seule démonstration de votre choix.

**b.** Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deux séries à termes positifs et que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Démontrer que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge aussi.

**c.** Rappeler le test du rapport et faire la démonstration.

**d.** Étudier la convergence de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n!}{e^{n^2}}$$

2. **Exercice (4 points)**

a) Faire un rappel sur le test de l'intégrale pour la convergence d'une série.

b) Montrer graphiquement que le reste $R_n$ d'une série est compris entre

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le R_n \le \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

c) **Application 1:**

- ✓ Trouver la somme partielle $S_6$ de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
- ✓ Estimez l'erreur $R_6$
- ✓ Trouver une valeur de n qui assure que l'erreur d'approximation soit inférieure à $10^{(-5)}$.
- ✓ Estimer la somme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

**Application 2 :**

Montrer que $t_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n) > 0$ | graphique ou reste

$f(x) = \frac{1}{x}$

**3. Exercice (3 points)**

Étudier la convergence des séries suivantes :

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!}$

Comparer la $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ avec ln(2) et $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!}$ Avec $e^{-1}$ avec trois chiffre significatifs

**4. Exercice (3 points)**

A) Étudier la convergence des séries :

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n^2}$

B) Dans le cas de la convergence décrire comment peut-on trouver la somme.