Contrôle en Analyse 3

Durée (1 h : 30 mn)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

1. Exercice (5 points)

a. Rappeler le test de divergence et faire la démonstration

b. Rappeler les tests de comparaison (deux tests) et faire la démonstration

c. Que pouvez-vous dire de la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ dans les cas suivants :

i. $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right| = 8$

ii. $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = 0.8$

iii. $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = 1$

d. Répondre par vrai ou faux. Justifier vos choix

i. Si $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\ 6^k$ est absolument convergente alors $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\ 2^k$ est convergente

ii. Si $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\ 6^k$ est convergente alors $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\ (-2)^k$ est convergente

iii. Si u_k est positive, décroissante et converge vers 0 alors $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\ (e^{u_k} - 1)$ converge

2. Exercice (4 points)

a) Faire un rappel sur le test de l'intégrale pour la convergence d'une série.

b) Montrer graphiquement que le reste R_n d'une série est compris entre

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le R_n \le \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

c) Montrer théoriquement le résultat en b)

d) Application :

- ✓ Trouver la somme partielle S_6 de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$
- ✓ Estimez l'erreur R_6
- ✓ Trouver une valeur de n qui assure que l'erreur d'approximation soit inférieure à $10^{(-15)}$.
- ✓ Estimer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

3. Exercice (3 points)

Estimer la somme des séries avec trois décimales exactes

a) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n!}$

4. Exercice (4 points)

Étudier la convergence des séries :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2+9n+20}\right)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\, ln(n)}$