Exercice I :

Soit $F : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $B = (e_1, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $B' = (e'_1, ..., e'_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$

1. $p = 2,\ q = 3$; la matrice de F par rapport aux bases B et B' est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (a) Déterminer l'image $F(v)$ d'un vecteur $v = (x_1, x_2)$.
   (b) Déterminer l'image de la base B , c'est à dire $F(e_1)$ et $F(e_2)$.
   (c) Déterminer $Ker(F)$
   (d) Déterminer $Im(F)$

2. $p = q = 4$ et $B' = B$; la matrice de F est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   (a) Déterminer l'image $F(v)$ d'un vecteur $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
   (b) Déterminer l'image de la base B , c'est à dire $F(e_1), F(e_2), F(e_3), F(e_4)$
   (c) Déterminer $Ker(F)$
   (d) Déterminer $Im(F)$

Exercice II :

On considère la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$
2. Montrer que A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

Exercice III :

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $Ker(f) = Vect(a)$, où on note par $vect(a)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur a.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$
   (a) Montrer que $\{b, c\}$ erst un système libre
   (b) Calculer $f(b)$ et $f(c)$,
   (c) Montrer que $b \in Im(f)$ et $c \in Im(f)$
   (d) En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $Im(f)$.
3. Déterminer une équation caractérisant $Im(f)$.