Université Internationale de Casablanca

CPI2 : ALGÈBRE 3, 2016-2017.
CONTRÔLE 28-12-2016

Exercice 0.0.1. *Soit A une matrice carrée $n \times n$ inversible telle que*

$$A + A^{-1} = I$$

Calculer

$$A^k + A^{-k}, \quad pour \quad k = 1, 2, 3, 4$$

où on note $A^{-k} = (A^{-1})^k$

Solution
On utilise le fait que

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I \quad et \quad I^k = I \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pour $k = 1$ c'est la formule donnée ci dessus : $A + A^{-1} = I$.

Pour $k = 2$: $(A + A^{-1})^2 = I \Rightarrow A^2 + 2I + A^{-2} = I$ donc

$$A^2 + A^{-2} = -I$$

Pour $k = 3$:$(A + A^{-1})^3 = I \Rightarrow A^3 + 3A^2A^{-1} + 3AA^{-2} + A^{-3} = I$ c'est à dire

$$A^3 + A^{-3} + 3A + 3A^{-1} + = I$$

et donc

$$A^3 + A^{-3} + 3I = I$$

ou encore

$$A^3 + A^{-3} = -2I$$

Pour $k = 4$: $(A + A^{-1})^4 = I \Rightarrow A^4 + 4A^3A^{-1} + 6A^2A^{-2} + 4AA^{-3} + A^{-4} = I$

$$A^4 + A^{-4} + 4(A^2 + A^{-2}) + 6I = I$$

$$A^4 + A^{-4} + 4(-I) + 6I = I$$

$$A^4 + A^{-4} = -I$$

Exercice 0.0.2. *Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'ils existent $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ae^x + be^{-x} + csin(x)$$

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
2. *Déterminer une base de E et sa dimension.*

Solution

1. E est un sous espace vectoriel : : Si $f, g \in E$ alors $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\exists a', b', c' \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ae^x + be^{-x} + csin(x)$ et $g(x) = a'e^x + b'e^{-x} + c'sin(x)$ $(f + g)(x) = (a + a')e^x + (b + b')e^{-x} + (c + c')sin(x) = a"e^x + b"e^{-x} + c"sin(x)$ De même pour λf.
2. $f(x) = au_1(x) + bu_2(x) + cu_3(x)$ et donc (u_1, u_2, u_3) est un système générateur. Il faut montrer qu'il est libre : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + \lambda_3 sinx = 0 \forall x \in \mathbb{R}$
Pour $x = \pi$ on a :$\lambda_1 e^{\pi} + \lambda_2 e^{-\pi} = 0$ Pour $x = \pi$ on a :$\lambda_1 e^{-\pi} + \lambda_2 e^{\pi} = 0$ ceci donne le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \lambda_1 e^{\pi} + \lambda_2 e^{-\pi} = 0 \\ \lambda_1 e^{-\pi} + \lambda_2 e^{\pi} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dont l'unique solution est

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Il reste $csinx = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. En particulier pour $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $c = 0$.
Le système est donc libre, c'est donc une base.

Exercice 0.0.3. *$E = \mathbb{R}^3$ et $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ avec*

$$u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (0,-1,0), \quad u_3 = (3,2,-1)$$

Et $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec

$$v_1 = (1,-1,0), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (0,0,-1)$$

1. *Montrer que B_1 est une base de E.*
2. *Montrer que B_2 est une base de E.*
3. *Calculer la matrice de passage P de la base B_1 à la base B_2 et son inverse P^{-1}*
4. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui même.*
   On suppose que la matrice associée à f dans la base B_1 est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) *Calculer la matrice A' de l'application linéaire f dans la base B_2*
   (b) *Calculer A'^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
   (c) *En déduire A^n*

Solution

1. B_1 est une base. Le système B_1 contient 3 éléments, la dimension de R^3 est égale à 3, Il suffit donc de montrer que le système B_1 est libre. Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = O = (0,0,0)$$

   alors on remplace u_1, u_2, u_3 par leurs composantes :

$$(\lambda_1 + 3\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, -\lambda_3) = (0,0,0)$$

   et donc on aura le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   La dernière équation donne $\lambda_3 = 0$ puis la première donne $\lambda_1 = 0$ et enfin la deuxième donne $\lambda_2 = 0$.
2. B_2 est une base : Pour les mêmes raisons que la question précédente il suffit de montrer que le système B_2 est libre. Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = O = (0,0,0)$$

   alors on remplace v_1, v_2, v_3 par leurs composantes :

$$(\lambda_1, -\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_3) = (0,0,0)$$

   et donc on aura le système

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

   La première équation donne $\lambda_1 = 0$, puis la deuxième donne $\lambda_2 = 0$ et la troisième donne $\lambda_3 = 0$.
3. Matrice de passage P de B_1 à B_2 :
   On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors on a

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 \\ u_2 = -e_2 \\ u_3 = 3e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases} \tag{4}$$

   d'où

$$\begin{cases} e_1 = u_1 + u_2 \\ e_2 = -u_2 \\ e_3 = 3u_1 + u_2 - u_3 \end{cases} \tag{5}$$

   On en tire les v_i en fonction des u_i : $v_1 = (1,-1,0) = e_1 - e_2 = u_1 + u_2 + u_2 = u_1 + 2u_2$ $v_2 = (0,1,0) = e_2 = -u_2$, $v_3 = (0,0,-1) = -e_3 = -3u_1 - u_2 + u3$

$$\begin{cases} v_1 == u_1 + 2u_2 \\ v_2 = -u_2 \\ v_3 = -3u_1 - u_2 + u_3 \end{cases} \tag{6}$$

La matrice de passage est donc donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la même technique on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) La matrice $A' = P^{-1}AP$ et donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A'^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

(c) $A^n = PA'^nP^{-1}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 - 3^{n+1} \\ 2 - 2^{n+1} & 2^n & 6 - 5 \times 2^n - 3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^0 = I$ et que $A^1 = A$.

Exercice 0.0.4. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* A^2
2. *Calculer* $A^3 - A$
3. *En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.*

Solution

1. Calcul de A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcul de $A^3 - A$:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 - A = 4I$$

3. $A(A^2 - I) = (A^2 - I)A = 4I$, on en tire donc

$$A\frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}(A^2 - I)A = I$$

et donc la matrice A est inversible est sa matrice inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$