Université
Internationale
de Casablanca

CPI2 : ALGÈBRE 3, 2016-2017.
CONTRÔLE 9-12-2016

Exo 1 : Soient

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$$

et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
(b) Déterminer $F \cap G$.
(c) Montrer que le système (v_1, v_2) où $v_1 = (1, 1, 2)$ et $v_2 = (1, 2, 3)$ est une base de F.
(d) Donner la dimension de F.
(e) Déterminer une base de G.
(f) Donner la dimension de G.

Solution de l'exo 1

(a) F et G sont des sous espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$, (Voir TD)
(b) Soit

$$(a - b, a + b, a - 3b) \in F \cap G$$

alors $2a - a + 3b = 0$ c'est à dire $a + 3b = 0$ i.e $a = -3b$. $(-4b, -2b, -6b) = -2b(2, 1, 3)$ L'intersection $F \cap G$ est la droite de vecteur directeur $(2, 1, 3)$ $dim F \cap G = 1$
(c) Fait en TD. $dim F = 2$
(d) Un élément de G est de la forme

$$(a - b, a + b, a - 3b) = (a, a, a) + (-b, b, -3b) = a(1, 1, 1) + b(-1, 1, -3)$$

Le sous espace G est engendré par les vecteurs

$$w_1 = (1, 1, 1), \quad w_2 = (-1, 1, -3)$$

On montre que le système (v_1, v_2) est libre
(e) $dim G = 2$

Exo 2 : Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'ils existent $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx + c)cosx$$

(a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(b) Déterminer une base de E et sa dimension.

Solution de l'exo 2

(a) E est un sev de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: Soit f , $g \in E$

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)cosx, \quad et \quad g(x) = (a'x^2 + b'x + c')cosx$$

Alors

$$(f + g)(x) = \left((a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')\right) cosx$$

Donc $f + g \in E$
De même $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda f \in E$.
(b)

$$f(x) = ax^2cosx + bxcosx + ccosx$$

Donc si on pose $u_1(x) = x^2cosx, \quad u_2(x) = xcosx, \quad u_3(x) = cosx$ alors $f = au_1 + bu_2 + cu_3$ et donc le système (u_1, u_2, u_3) est un système qui engendre E
Montrons que ce système est libre :

Soient $\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3 \quad \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

alors

$$\lambda_1 x^2 cosx + \lambda_2 x cosx + \lambda_3 cosx = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier :
-Pour $x = 0$ on aura $\lambda_3 = 0$. Donc il reste

$$\lambda_1 x^2 cosx + \lambda_2 x cosx = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On simplifie par x s'il n'est pas nul :

$$\lambda_1 x cosx + \lambda_2 cosx = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

-Pour $x = \pi$:

$$\lambda_1 \pi cos(\pi) + \lambda_2 cos(\pi) = 0 \Leftrightarrow -\pi\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

-Puis

$$x = -\pi$$

$$-\lambda_1 \pi cos(-\pi) + \lambda_2 cos(-\pi) = 0 \Leftrightarrow \pi\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\begin{cases} -\pi\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \pi\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
On conclut que E est un sous espace vectoriel de dimension 3.

Exo 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$\begin{cases} u_1 = e_2 + 2e_3 \\ u_2 = e_3 - e_1 \\ u_3 = e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.

Solution de l'exo 3 Soient $\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3 \quad \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

alors

$$\lambda_1(e_2 + 2e_3) + \lambda_2(e_3 - e_1) + \lambda_3(e_1 + 2e_2) = 0$$

Ce qui donne

$$(-\lambda_2 + \lambda_3)e_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)e_2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)e_3 = 0$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base alors

$$\begin{cases} -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Ce système admet comme unique solution

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Et le système (u_1, u_2, u_3) est donc une base de E.

Exo 4 : Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

(a) Comparer $kerf \cap kerg$ et $ker(f+g)$.
(b) Comparer $Imf + Img$ et $Im(f+g)$.
(c) Comparer $kerf$ et $ker(fof)$.
(d) Comparer Imf et $Im(fof)$.

Solution de l'exo 4

(a) Si $x \in kerf \cap kerg$ alors $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ donc $(f+g)(x) = 0$ c'est à dire $x \in Ker(f+g)$.

$$kerf \cap kerg \subset ker(f+g).$$

(b) Si $y \in Im(f+g)$ alors $\exists x \in E \quad tel \quad que y = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \in Imf + Img$

$$Im(f+g) \subset Imf + Img$$

(c) Si $x \in kerf$ alors $f(x) = 0$ et $f(f(x)) = 0$, et donc $x \in ker(fof)$

$$kerf \subset ker(fof)$$

(d) Si $y \in Im(fof)$ alors $\exists x \in E$ tel que $y = fof(x)$ donc $y = f(f(x))$ et donc $y \in Imf$

$$Imfof \subset Imf$$

Exo 5 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0 \qquad (1)$$

(b) Sous quelle condition la matrice A est inversible.

(c) donner la condition nécessaire pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Donner sa matrice inverse en utilisant la formule (1) ci dessus.

Solution de l'exo 5

(a) c'est du calcul simple

(b) La formule

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$$

peut s'écrire

$$A\left(A - (a+d)I\right) = -(ad-bc)I \quad et \quad \left(A - (a+d)I\right)A = -(ad-bc)I$$

La matrice A est donc inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et son inverse est la matrice

$$\frac{-1}{ad-bc}\left(A - (a+d)I\right) = \frac{-1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a-a-d & b \\ c & d-a-d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(c) Dans ce cas $d = -a$ et donc la condition d'existence de l'inverse devient $-a^2 - bc \neq 0$, c'est dire

$$a^2 + bc \neq 0$$

Son inverse sera donc

$$\frac{1}{a^2+bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

On en déduit aussi que $A^{-1} = A$ si et seulement si $a^2 + bc = 1$.

Exo 6 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in L(E)$ dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_3 \\ u_2 = e_1 + e_2 \\ u_3 = e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

(a) Montrer que la famille $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.

(b) Déterminer la matrice A' de f dans la base B' .

(c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exo 6

(a) Comme B' contient 3 éléments il suffit de montrer que le système est libre. Soient $\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3 \quad \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

alors

$$\lambda_1(e_1 + 2e_3) + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(e_1 + e_2 + e_3) = 0$$

Ce qui donne

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)e_3 = 0$$

Et comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Et ce système admet comme solution unique

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(b) La matrice A' de f dans la base B' est $A' = P^{-1}AP$. La matrice de passage est donnée par les composantes des vecteurs u_1, u_2, u_3 dans la base B :
$u_1 = e_1 + e_3$
$u_2 = e_1 + e_2$
$u_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons P^{-1} : Il suffit de trouver les vecteurs $e_1, e_2, e_3)$ en fonction des vecteurs (u_1, u_2, u_3) $u_1 = e_1 + e_3 \quad u_2 = e_1 + e_2 \quad u_3 - u_2 = e_3 \quad u_3 - u_1 = e_2 \quad e_1 = u_1 - e_3 = u_1 - u_3 + u_2$

$$\begin{cases} e_1 = u_1 + u_2 - u_3 \\ e_2 = -u_1 + u_3 \\ e_3 = -u_2 + u_3 \end{cases}$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $A'^2 = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$ et d'une manière générale

$$A'^n = P^{-1}A^nP$$

et donc

$$A^n = PA'^nP^{-1}$$

Il suffit donc de calculer A'^n On calcule facilement

$$A'^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis faire le calcul inverse

$$A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & n+1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & n+1 \end{pmatrix}$$