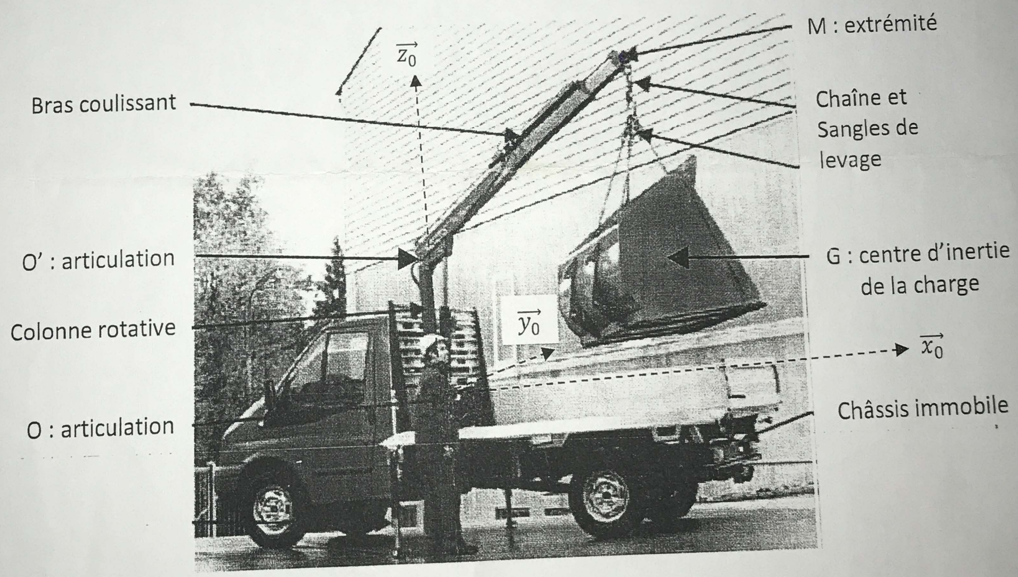
Consignes :

Écrivez vos nom et prénom *avant de commencer une nouvelle double feuille.*
Tracez et laissez une marge *de 1 cm environ à gauche de chaque page.*
Encadrez la réponse définitive *sous forme de formule.*
Documents, Calculatrice et Téléphone*: non autorisés.*
Attention : *aucun échange ne sera autorisé entre étudiants (stylo, règle, effaceur, etc.)*
Soignez votre écriture *: cela facilitera la lecture et accélèrera la correction.*
Durée *: 2h*

Exercice (10 pts) : mouvement d'une grue de levage

On s'intéresse à une grue de levage mobile sur camion. Durant la manœuvre de chargement ou de déchargement, le camion est immobile.
On définit le référentiel $\Re\,(O \quad \vec{x_0} \quad \vec{y_0} \quad \vec{z_0})$, où $\vec{y_0}$ pointe vers la droite du camion.
La colonne rotative, délimitée par les points O et O', a un mouvement de rotation autour de $\vec{z_0}$, d'angle $\theta_1 = (\widehat{\vec{x_0} \quad \vec{x_1}}) = (\widehat{\vec{y_0} \quad \vec{y_1}})$. On définit alors le référentiel $\Re'(O' \quad \vec{x_1} \quad \vec{y_1} \quad \vec{z_1})$.
Le bras coulissant, délimité par O' et M, est de longueur variable, notée r. Il tourne autour de l'axe $\vec{y_1}$ avec un angle $\theta_2 = (\widehat{\vec{z_1} \quad \vec{z_2}}) = (\widehat{\vec{x_1} \quad \vec{x_2}})$. On définit ainsi le référentiel $\Re''(M \quad \vec{x_2} \quad \vec{y_2} \quad \vec{z_2})$.
Conseil : dessinez sur un brouillon les projections en 2D des angles θ_1 et θ_2 et des vecteurs associés avant de répondre aux questions 3 et 4.



Questions :

1. Donner la chaine cinématique
2. En déduire les expressions des vecteurs vitesses de rotation $(\vec{\Omega_e} \quad \vec{\Omega_r} \quad \vec{\Omega_a})$
3. Écrire les vecteurs $(\vec{x_1} \quad \vec{y_1} \quad \vec{z_1})$ en fonction de $(\vec{x_0} \quad \vec{y_0} \quad \vec{z_0})$
4. Écrire les vecteurs $(\vec{x_2} \quad \vec{y_2} \quad \vec{z_2})$ en fonction de $(\vec{x_1} \quad \vec{y_1} \quad \vec{z_1})$
5. Calculer la vitesse d'entrainement de M
6. Calculer la vitesse relative de M
7. Calculer l'accélération d'entrainement de M
8. Calculer l'accélération de Coriolis de M
9. Calculer l'accélération relative de M

Exercice (10 pts) : mouvement d'un disque dans un cylindre

Un disque plein et homogène, de masse m, de rayon R_2, d'épaisseur e, roule sans glisser à l'intérieur d'un cylindre creux, fixe, de centre O et de rayon R_1. Le contact se fait en I.

Attention : le poids $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$ intervient ici dans le mouvement.

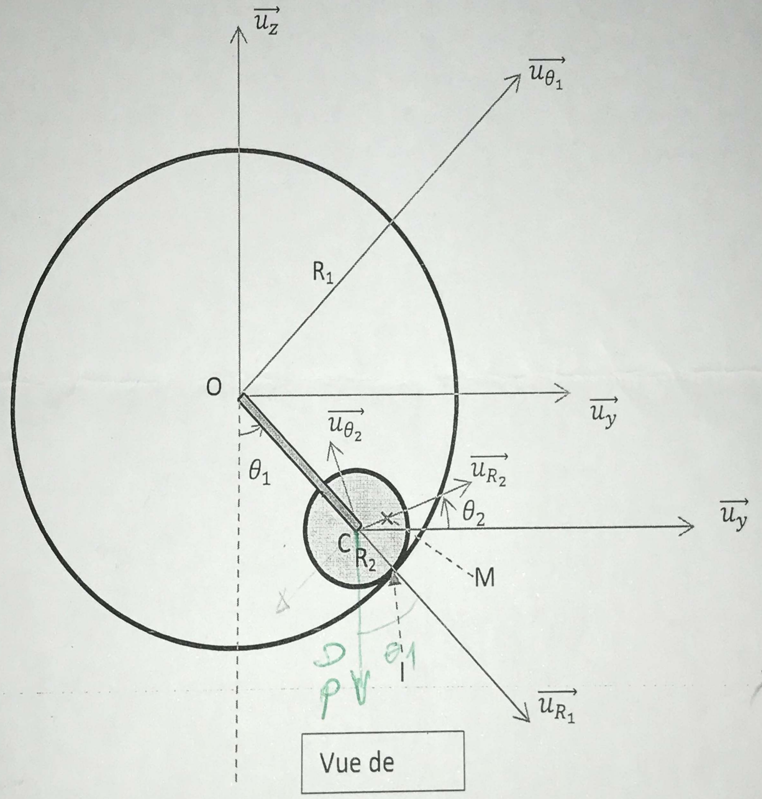
La position du centre C du disque est repérée par l'angle $\theta_1 = \left(\widehat{-\overrightarrow{u_z} \quad \overrightarrow{u_{R_1}}}\right)$, la distance $\|\overrightarrow{OC}\|$ étant constante.

Soit M un point quelconque du disque. Sa position est repérée par le rayon r ($0 \le r \le R_2$) et l'angle absolu $\theta_2 = \left(\widehat{\overrightarrow{u_y} \quad \overrightarrow{u_{R_2}}}\right)$.

On note l'axe de symétrie du disque, la droite $\Delta = (C, \overrightarrow{u_x})$ et sa parallèle $\Delta' = (I, \overrightarrow{u_x})$ passant par I.

On suppose que Δ reste parallèle à l'axe du cylindre : le disque reste dans le plan $(\overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

Le bras [OC] exerce une force $\vec{F} = F\overrightarrow{u_{R_1}}$ sur le disque en son centre C, afin de le garder en contact avec le cylindre creux. Celui-ci exerce sur le disque une réaction $\vec{R} = R_N\overrightarrow{u_{R_1}} + R_T\overrightarrow{u_{\theta_1}}$ en I.



$(u_r, u_\theta, u_x$

Questions :

1. Calculer J_Δ le moment d'inertie du disque par rapport à $\Delta = (C, \overrightarrow{u_x})$, (intégrale triple)
2. En déduire $J_{\Delta'}$, le moment d'inertie du disque par rapport à $\Delta' = (I, \overrightarrow{u_x})$ (Huyghens)
3. Démontrer la condition de non glissement $(R_1 - R_2)\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2 = 0$
4. Exprimer l'énergie cinétique E_C pour le disque en rotation autour de $\Delta' = (I, \overrightarrow{u_x})$
5. Calculer $\overrightarrow{V_C}$, la vitesse de C, en utilisant Varignon
6. En déduire l'énergie cinétique E_C pour le disque en rotation autour de $\Delta = (C, \overrightarrow{u_x})$
7. Exprimer les moments cinétiques σ_Δ et $\sigma_{\Delta'}$
8. Écrire le Théorème du Moment Cinétique et donner les moments des forces extérieures
9. En déduire l'équation horaire dans le cas où θ_1 est petit.