Consignes :
***Écrivez vos nom et prénom** avant de commencer une nouvelle double feuille.*
***Tracez et laissez une marge** de 1 cm environ à gauche de chaque page.*
***Encadrez la réponse définitive** sous forme de formule.*
***Documents, Calculatrice et Téléphone**: non autorisés*
***Attention :** aucun échange ne sera autorisé entre étudiants (stylo, règle, effaceur, etc.)*
***Soignez votre écriture** : cela en facilitera la lecture et en accélèrera la correction.*
***Durée** : 1h 30*

Questions de cours (5 pts)

Soient le référentiel $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$ fixe, les droites $\Delta_{Ox}=(O,\overrightarrow{u_x})$, $\Delta_{Oy}=(O,\overrightarrow{u_y})$ et $\Delta_{Oz}=(O,\overrightarrow{u_z})$, et les plans $\pi_{yOz}=(O,\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$, $\pi_{xOz}=(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_z})$ et $\pi_{xOy}=(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$

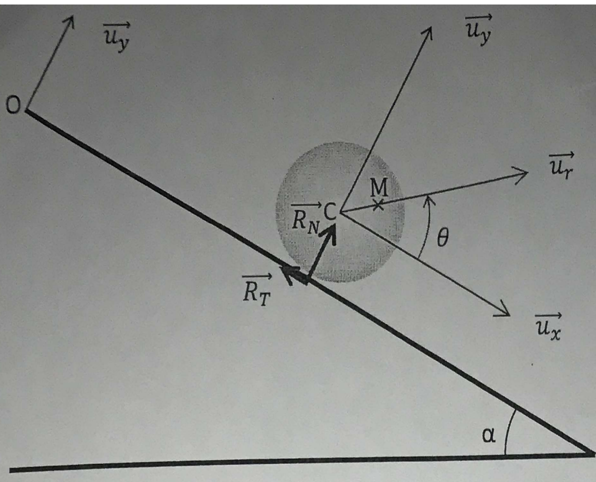
On définit un solide S, de masse $m=\iiint_S dm$, de volume $v=\iiint_S dv$, de masse volumique uniforme $\rho=m/v=dm/dv$ et dont les points M sont repérés dans $\mathcal{R}$ par les coordonnées (x,y,z)

1. Exprimer la relation définissant le centre de gravité G, sous la forme intégrale
2. Exprimer J_O le moment d'inertie par rapport au centre O
3. Exprimer $(J_{Ox}\quad J_{Oy}\quad J_{Oz})$ les moments d'inertie par rapport aux droites $(\Delta_{Ox}\quad \Delta_{Oy}\quad \Delta_{Oz})$
4. En déduire une relation entre les moments d'inertie $(J_O\quad J_{Ox}\quad J_{Oy}\quad J_{Oz})$
5. Exprimer $(J_{Oyz}\quad J_{Oxz}\quad J_{Oxy})$ les moments d'inertie par rapport aux plans $(\pi_{yOz}\quad \pi_{xOz}\quad \pi_{xOy})$
6. En déduire une relation entre les moments d'inertie $(J_O\quad J_{Oyz}\quad J_{Oxz}\quad J_{Oxy})$
7. Utiliser Huyghens pour exprimer une relation entre $(J_{Ox}\quad J_{Gx})$ sachant que $a=\sqrt{{y_G}^2+{z_G}^2}$ est la distance entre les deux droites Δ_{Ox} et Δ_{Gx}
8. Exprimer $\vec{p}$ et $\vec{\sigma}_O$ la résultante cinétique et le moment cinétique en O sous la forme intégrale
9. Exprimer $\vec{D}$ et $\vec{K}_O$ la résultante dynamique et le moment dynamique en O sous la forme intégrale
10. Exprimer les moments cinétique σ_Δ et dynamique K_Δ par rapport à Δ en fonction de J_Δ et θ

Exercice (5 pts) : mouvement d'une boule sur un plan incliné

On pose une boule pleine et homogène, de centre $C\ (x_C\quad y_C=R\quad z_C=0)$, de rayon R et de masse m, sur un plan incliné d'un angle α. Le contact se fait en I et le roulement se fait sans glissement.
Le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est attaché à la boule, passant par un point M quelconque dans le plan xOy.
L'abscisse x_C et l'angle θ paramètrent le mouvement de la boule en translation et en rotation.
On note l'axe de symétrie de la boule, la droite $\Delta=(C,\overrightarrow{u_z})$ et la droite parallèle $\Delta'=(I,\overrightarrow{u_z})$.
On note les réactions du plan : tangentielle $\overrightarrow{R_T}=R_T\overrightarrow{u_x}$ et normale $\overrightarrow{R_N}=R_N\overrightarrow{u_y}$

1. Calculer le volume d'une boule en utilisant les coordonnées sphériques, sachant que $dv=dr.r\cos\varphi\, d\theta.rd\varphi$, où $\theta\in[0,2\pi]$ désigne la longitude et $\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$, la latitude.
2. Exprimer J_Δ le moment d'inertie de la boule par rapport à Δ et en déduire $J_{\Delta'}$
3. En déduire les moments cinétique $\sigma_{\Delta'}$ et dynamique $K_{\Delta'}$
4. Exprimer l'énergie cinétique Ec
5. Écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation horaire



Exercice (5 pts) : rotation d'une porte autour de son axe

Une porte de masse m, de hauteur H de longueur L et d'épaisseur e négligeable pivote autour de l'axe fixe vertical $\Delta' = (O, \vec{z})$. On notera $\Delta = (G, \vec{z})$

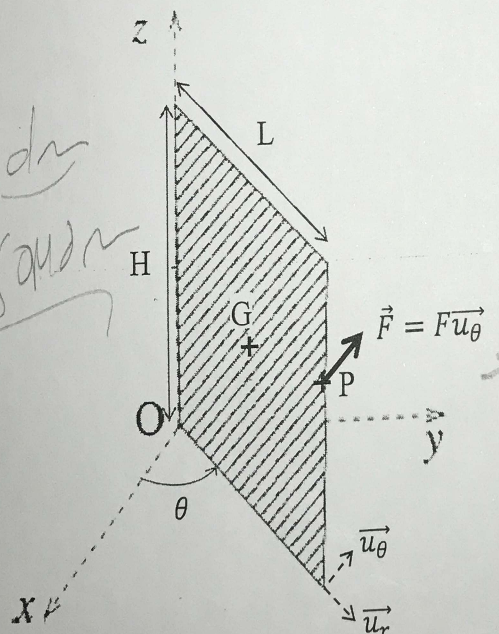
Notons P le point vérifiant $\overrightarrow{GP} = L/2\,\vec{u_r}$.

Un homme applique une force $\vec{F} = F\vec{u_\theta}$ au point P, tel que F est constant.

1. Exprimer J_Δ le moment d'inertie de la porte par rapport à Δ et en déduire $J_{\Delta'}$
2. En déduire les moments cinétique σ_Δ et dynamique K_Δ
3. Calculer $\vec{V_G}$ la vitesse de G
4. Exprimer l'énergie cinétique Ec de deux manières
5. Écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation horaire

$= \iiint dm$

$= \iiint OM^2 dm$



$m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m\,\frac{L}{\ldots}$

Exercice (5 pts) : mouvement d'un disque dans un cylindre

Un disque plein et homogène, de masse m, de rayon R_2, d'épaisseur e, roule sans glisser à l'intérieur Le poids $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$ n'intervient pas.

d'un cylindre creux, fixe, de centre O et de rayon R_1. La position du centre C du disque est repérée par l'angle $\theta_1 = (-\vec{u_y}, \vec{u_{R_1}})$, la distance $\|\overrightarrow{OC}\|$ étant constante.

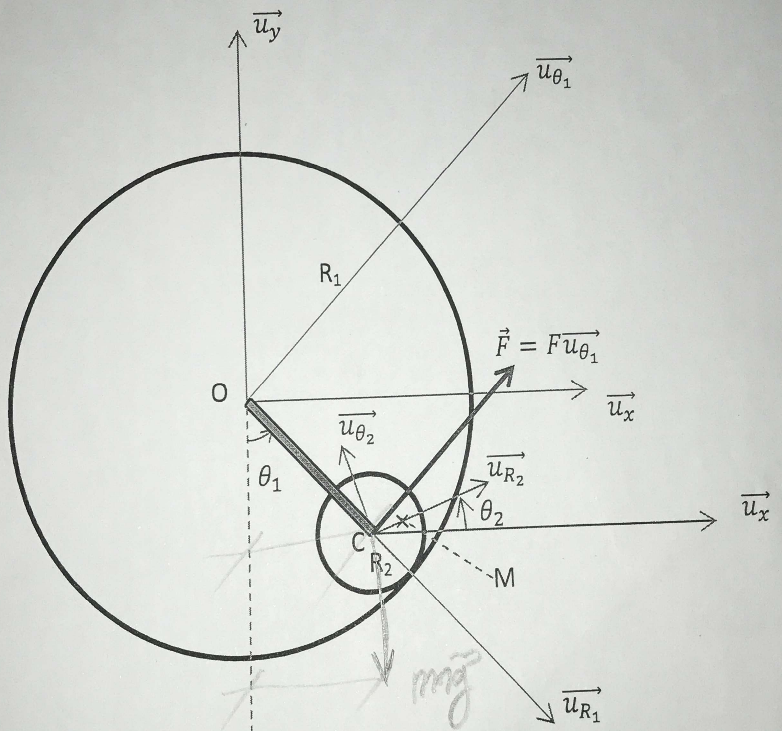
La position d'un point M quelconque du disque est repérée par le rayon r ($0 \leq r \leq R_2$) et l'angle absolu $\theta_2 = (\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_{R_2}}})$.

On note l'axe de symétrie du disque, la droite $\Delta = (C, \overrightarrow{u_z})$.

On suppose que Δ reste parallèle à l'axe du cylindre : le disque reste dans le plan $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.

Le bras [OC] exerce une force $\vec{F} = F\overrightarrow{u_{\theta_1}}$ sur le disque en son centre C, de norme F constante.

1. Exprimer J_Δ le moment d'inertie du disque par rapport à Δ
2. En déduire le moment cinétique σ_Δ
3. Démontrer la condition de non glissement $(R_1 - R_2)\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2 = 0$
4. Exprimer l'énergie cinétique Ec
5. Écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation horaire



Vue de dessus

$\boxed{\pi R^2 . e}$