UIC 13 Juin 2016 1

Pr. Morad LAKHSASSI

CPI 1

Examen final
Analyse 2

Exemple de CORRIGÉ :

Exercice 1 : 7 points

1) Primitives :

a) $(t^2+1)\cos(t)$: 1pt

$$\int^t \underset{u}{(x^2+1)}\underset{v'}{\cos x}\,dx \overset{IPP}{=} \Big[\underset{u}{(x^2+1)}\underset{v}{\sin x}\Big]^t - \int^t \underset{u'}{2x}\,\underset{v}{\sin x}\,dx$$

$$= (t^2+1)\sin t + C - \left(\Big[2x(-\cos x)\Big]^t - \int^t 2(-\cos x)\,dx\right)$$

$$= (t^2+1)\sin t + 2t\cos t - 2\int^t \cos x\,dx + C'$$

$$= (t^2+1)\sin t + 2t\cos t - 2\Big[\sin x\Big]^t + C'$$

$$\boxed{\int^t (x^2+1)\cos x\,dx = (t^2-1)\sin t + 2t\cos t + cte}$$

b) $\arccos t$: 1pt

$$\int^t \arccos(x)\,dx = \int^t x'.\arccos x\,dx \overset{IPP}{=} \Big[x.\arccos x\Big]^t - \int^t \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= t\arccos t - \int^t \left(\sqrt{1-x^2}\right)'\,dx$$

$$\boxed{\int^t \arccos(x)\,dx = t\arccos(t) - \sqrt{1-t^2} + cte}$$

2) $\int \ln t$ et $\int (\ln t)^2$: 1pt + 1pt

$$\boxed{\int^t \ln x\,dx} \overset{IPP}{=} \Big[x.\ln x\Big]^t - \int^t x.\frac{1}{x}\,dx = \boxed{t\ln t - t + cte}$$

$$\int^t (\ln x)^2 dx \overset{IPP}{=} \left[x(\ln x)^2\right]^t - \int^t x \cdot \frac{2}{x} \cdot \ln x \, dx$$
$$= t(\ln(t))^2 - 2\int^t \ln x \, dx$$
$$= t \ln^2(t) - 2(t\ln t - t + c \quad)$$

$$\boxed{\int^t (\ln x)^2 dx = t\left(\ln^2(t) - 2\ln t + 2\right) + \text{cte}}$$

Autre méthode : $\int^t \ln x \cdot \ln x \, dx = \left[\ln x \cdot (x\ln x - x)\right]^t - \int^t \frac{1}{x} \cdot (x\ln x - x)\, dx$ ...

3)

a) $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$: 1,5 pts

$$(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \cdot \ln t\right]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \sqrt{t}\, dt$$
$$= \left[2\sqrt{t} \cdot \ln t\right]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$$
$$= \left[2\sqrt{t} \cdot \ln t\right]_1^2 - 4\left[\sqrt{t}\right]_1^2$$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4}$$

Autre méthode :

$u := \sqrt{t} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$\Rightarrow du = \frac{1}{2u} dt$

$\int = \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln(u^2)\, du$

$= 4\int_1^{\sqrt{2}} \ln u \, du$

$= 4\left[t\ln t - t\right]_1^{\sqrt{2}}$ ...

b) $\int_0^1 t \cdot \arctan(t)\, dt$: 1,5 pts

$$\int_0^1 t \cdot \arctan(t)\, dt = \left[\frac{t^2}{2} \cdot \arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{2} \cdot \arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2}\, dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\arctan t\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$$

Arctan 1 = $\frac{\pi}{4}$!!

Arctan 0 = 0 !!

$$\boxed{\int_0^1 t \cdot \arctan(t)\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

Exercice 2 : 1,5 pts

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \ ?$$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= n^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}_{a=0,\ b=1}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x \cdot \sin(\pi x)\, dx$$

$$= -\left[x \cdot \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos\pi + 0 + \frac{1}{\pi^2}\underbrace{\left[\sin \pi x\right]_0^1}$$

$$= \frac{1}{\pi} \quad \left(\cos\pi = -1 \ !!\right)$$

or $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

d'où $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \times \frac{1}{\pi} = +\infty$

d'où : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = +\infty}$!

ou Autre méthode :

$$S_n = \frac{n^2}{\pi^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n}\right)}_{} \Longrightarrow a=0 \text{ et } b=\pi$$

d'où : $\frac{n^2}{\pi^2} \to +\infty$; $\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi} x \cdot \sin x\, dx$ .... donne le même résultat.

$\boxed{\text{Exercice 3 :}}$ 6 points

a) $DL_6\left(\dfrac{sh(x)-x}{x^3}, 0\right)$: 1,5 pts

$$sh(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9)$$

d'où : $$\frac{sh(x)-x}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9)}{x^3}$$

or $$\frac{o(x^9)}{x^3} = o(x^6) \text{ !!}$$

d'où : $$\boxed{\frac{sh(x)-x}{x^3} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} + \frac{x^6}{9!} + o(x^6)}$$

b) $DL_6(\ln(\cos x), 0)$: 1,5 pts

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \quad \boxed{x\to 0}$$

d'où $$\ln(\cos(x)) = \ln\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)}_{u}\Big)$$

$$u := -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

d'où $\ln(\cos(x)) = \ln(1+u)$ avec $u \to 0$!!

$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \underset{u\to 0}{o(u^3)}$$

On remplace par la valeur de u :

$$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\underbrace{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\right)^3}_{u^3} + o\left(u^3\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{48}-\frac{x^6}{48}+o(x^6)\right)$$

$$+\frac{1}{3}\underbrace{\left(-\frac{x^6}{8}+o(x^6)\right)}_{u^3} + \underbrace{o\left(-\frac{x^6}{8}+o(x^6)\right)}_{o}$$

$$= -\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+\left(-\frac{1}{6!}+\frac{2}{2\times 48}-\frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6)$$

$$\boxed{\ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)}$$

d) $DL_3\left(\cos(x), \frac{\pi}{3}\right)$: 1,5 pts

Attention : un DL en a $(a \neq 0)$, s'écrit :

⚠ $$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$

et non $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + o(x^n)$

1ère méthode :

$h := x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{h} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{3}]{} \boxed{0}$

d'où $\cos(x) = \cos\left(h+\frac{\pi}{3}\right) = \cos h \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin h \cdot \sin\frac{\pi}{3}$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}+o(h^3)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} h + \frac{\sqrt{3}}{12} h^3 \underset{h \to 0}{+ o(h^3)}$$

$$\boxed{\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \underset{x \to \frac{\pi}{3}}{+ o}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3}$$

2ème méthode:

En utilisant la formule de Taylor-Young:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \cos'\frac{\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos''\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \cos'''\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x-a) - \frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(x-a)^3}{3!} \underset{x \to a}{+ o(x-a)^3}$$

$$\text{d'où: } \cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \underset{x \to \frac{\pi}{3}}{+ o}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$$

c) $DL_3(\sqrt{x}, 1)$: 1,5 pts

$$h := x - 1 \Rightarrow \boxed{h} \xrightarrow[x \to 1]{} \boxed{0}$$

$$\text{d'où } \sqrt{x} = \sqrt{1+h} \underset{h \to 0}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} h^3 \underset{h \to 0}{+ o(h^3)}$$

$$\boxed{\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 \underset{x \to 1}{+ o}(x-1)^3}$$

Exercice 4 : 2 points

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$$

On veut étudier l'asymptote au graphe de f lorsque $x \to +\infty$

d'où $\underline{x > 0}$; d'où : $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \underbrace{\dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}}_{u}}$

on pose $u := \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ d'où : $u \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

d'où $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \underset{u \to 0}{o}(u^2)$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^4}\right) + o\left(\frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^4}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où $\boxed{f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

d'où $\boxed{\text{l'asymptote } y = 1 + x}$ en $+\infty$.

et $f(x) - y = \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ quand $x \to +\infty$

d'où : le graphe de f est au-dessus de son asymptote lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 5 : 2,5 points

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $E : y' + y = x \cdot \cos x$: 1pt

solution de l'équation homogène $y' + y = 0$:

(SH) : $y_0 = \lambda \cdot e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

solution particulière :

(SP) : $y_1 = \lambda(x) \cdot e^{-x}$ (méthode de variation de la constante)

$\Rightarrow y_1'(x) = \lambda'(x) \cdot e^{-x} - \lambda(x) \cdot e^{-x}$

$\Rightarrow y_1'(x) + y_1(x) = \lambda'(x) \cdot e^{-x}$

y_1 est (SP) de E $\iff \lambda'(x) \cdot e^{-x} = x \cdot \cos x$

$\iff \lambda'(x) = x \cdot \cos x \cdot e^{x}$

$\iff \lambda(x) = \int^{x} u \cdot \cos(u) \cdot e^{u} \, du$

$\iff y_1 = e^{-x} \cdot \int^{x} u \cdot \cos(u) \cdot e^{u} \, du$

$\Rightarrow$ (SG) : $\boxed{y = y_1 + y_0}$

Pour avoir une expression exacte de $y_1(x)$, il y a un théorème (non vu en cours !) qui dit que :

une (SP) de E est la partie réelle d'une SP de :

$E' : z' + z = x \cdot e^{\alpha x}$

avec $\alpha = i\omega$, ici ω est celui de $\cos x = \cos(\omega x) \Rightarrow \omega = 1$.

d'où : $\alpha = i$

d'où : $z' + z = x e^{ix}$

d'où une SP de E' est $z_1 = x^m (ax + b) e^{ix}$ $\begin{cases} m = 1 \text{ si } \alpha \text{ solution de l'équation caractéristique : } r + 1 = 0 \\ m = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

ici $m = 0$ car $\alpha = i$ n'est pas solution de l'éq. caract.

d'où : $$z_1 = (ax+b)e^{ix}$$

$$\Rightarrow z_1' = (ai\,x + bi + a)\,e^{ix}$$

z_1 SP de E' $\Leftrightarrow$ $(aix + bi + a + ax + b)e^{ix} = x\,e^{ix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ai + a = 1 \\ a + b + bi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{1+i} \\ b(1+i) = -\dfrac{1}{1+i} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{1+i} \text{ et } b = -\frac{1}{(1+i)^2}$$

$$\Leftrightarrow z_1(x) = \left(\frac{x}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}\right)e^{ix}$$

$$= \left(\frac{1-i}{2}x + \frac{i}{2}\right)e^{ix}$$

d'où $y_1(x) = \mathrm{Re}\left(z_1(x)\right) = \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}(x-1)\sin x$

d'où la solution générale de E :

$$(SG) : \boxed{y = \underbrace{y_0}_{SH} + \underbrace{y_1}_{SP} = \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}(x-1)\sin x + \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) résoudre sur $\mathbb{R}$: $E : y'' + y' + 2y = x^2 + 2 \Rightarrow$ Cadre réel

Éq. caract. $r^2 + r + 2 = 0$ $\quad \Delta = 1 - 8 = -7$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

d'où solution de l'équation homogène (sans second membre) :

(SH) : $y_0 = \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

solution particulière :

puisque le second membre est : $x^2 + 2$ et $y'' + y' + 2y$: coeff non nuls

donc $y_1 = ax^2 + bx + c$

$\Leftrightarrow y_1' = 2ax + b$ et $y_1'' = 2a$

$\Leftrightarrow y_1'' + y_1' + 2y_1 = 2a + 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 + 2$

d'où y_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de $E \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 2c = 2 \\ 2a + 2b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = \frac{3}{4} \end{cases}$

d'où : $\boxed{(SG) = \overbrace{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}}^{SP} + \overbrace{\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}}^{SH} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

Fin .