1

Université Internationale de Casablanca 13 juin 2019

Pr. M. Lakhssassi **ANALYSE 2** **CPI1**

EXAMEN FINAL – Durée 2h

NON AUTORISES : Calculatrices, Documents, Téléphone et échanges (stylo, blanco…)

0,5 points	• Laissez une MARGE de 2 cm à GAUCHE • Inscrivez votre GROUPE
0,5 points	• Soignez l'écriture • NUMEROTEZ vos feuilles doubles

LISEZ BIEN L'ENONCE DE CHAQUE QUESTION ET JUSTIFIEZ VOS REPONSES !

Exercice 1 : 4,5 points a) **Rattrapage N°2 19 sept 2018 (non corrigé)** b) CC1 26 avril 2018

Déterminer un **équivalent** le plus simple possible **puis** calculer les **limites en 0** de :

a) $\sin(x^5).\ln(x)$ b) $\left[\ln\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)\right]^x$ c) $e^x - \cos(x)$

1,5

a)

0,25 On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$

0,5 or $x^5 \xrightarrow[0]{} 0$ donc $\sin(x^5) \underset{0}{\sim} x^5$

0,25 d'où $\boxed{\sin(x^5).\ln x \underset{0}{\sim} x^5.\ln x}$ or $\lim_0 x^5 \ln x = \text{"}0.(-\infty)\text{"}$ F.I. $= \lim_0 x^5 = 0$ (x^α gagne)

0,5 donc $\boxed{\lim_0 \sin x^5.\ln x = 0}$

1,5 + 1,5 bonus

b)

$\boxed{0^+}$:

+0,25 bonus

$\left(\ln\left(1+e^{-1/x}\right)\right)^x$ $e^{-1/x} \xrightarrow[0^+]{} 0$ car $\boxed{-\frac{1}{x} \xrightarrow[0^+]{} -\infty}$

or $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

0,5 d'où $\boxed{\ln(1+e^{-1/x}) \underset{0^+}{\sim} e^{-1/x}}$

$\left(\ln(1+e^{-1/x})\right)^x = e^{x\ln\left(\ln(1+e^{-1/x})\right)}$

or $e^{-1/x} > 0$ et $e^{-1/x} \xrightarrow[0^+]{} 0 \neq 1$

0,5 donc on peut composer par ln : $\boxed{\ln\left(\ln(1+e^{-1/x})\right) \underset{0^+}{\sim} \ln(e^{-1/x})} = \ldots$

d'où $x.\ln\left(\ln(1+e^{-1/x})\right) \underset{0^+}{\sim} -1$

d'où $e^{x \cdot \ln(\ln(1+e^{-1/x}))} \xrightarrow[0^+]{} e^{-1} = \frac{1}{e}$

0,5 d'où $\boxed{\left(\ln(1+e^{-1/x})\right)^x \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{e}}$

$\boxed{0^-}$:

cas $\boxed{0^-}$ +1 BONUS

$\boxed{-\frac{1}{x} \xrightarrow[0^-]{} +\infty}$

$e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[0^-]{} +\infty$, $X := e^{-1/x}$

$1 + X \underset{X \to +\infty}{\sim} X$

$X > 0$ en $+\infty$ et $X \xrightarrow[+\infty]{} +\infty \neq 1$

d'où $\ln(1+X) \underset{X \to +\infty}{\sim} \ln(X)$, or $X \xrightarrow[x \to 0^-]{} +\infty$

donc $\ln(1+e^{-1/x}) \underset{0^-}{\sim} \ln(e^{-1/x}) = -\frac{1}{x}$

or $-\frac{1}{x} > 0$ au $V(0^-)$ (et ~~donc~~ $\ln(1+e^{-1/x}) > 0$ car $e^{-1/x} > 0$)

et $-\frac{1}{x} \xrightarrow[0^-]{} +\infty \neq 1$

d'où $\ln\left(\ln(1+e^{-1/x})\right) \sim \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$

d'où $x \cdot \ln\left(\ln(1+e^{-1/x})\right) \sim x \ln\left(-\frac{1}{x}\right) = -x \cdot \ln(-x)$ $|-x|$

or $x \cdot \ln x \xrightarrow[0^+]{} 0$, donc $-x \cdot \ln(-x) \xrightarrow[0^-]{} 0$

d'où $e^{x \cdot \ln(\ln(1+e^{-1/x}))} \xrightarrow[0^-]{} e^0 = 1$

d'où $\boxed{\left(\ln(1+e^{-1/x})\right)^x \underset{0^-}{\sim} 1}$

d'où $\boxed{\begin{array}{l} \left(\ln\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)\right)^x \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{e} \\ \text{et} \\ \left(\ln\left(1+e^{-1/x}\right)\right)^x \underset{0^-}{\sim} 1 \end{array}}$

d'où

+0,25 BONUS

$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln\left(1+e^{-1/x}\right)\right)^x = 1/e \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\ln\left(1+e^{-1/x}\right)\right)^x = 1 \end{array}}$

1,5 c)

0,5 $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

$\cos x = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)$ $\left(\text{car } \cos x = 1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{=o(x)}\right)$

0,5 d'où $e^x - \cos x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ $\left(\text{car } o(x) - o(x) = o(x)\right)$

0,25 d'où $\boxed{e^x - \cos x \underset{0}{\sim} x}$, or $x \longrightarrow 0$

0,25 donc $\boxed{\lim\limits_{0} e^x - \cos x = 0}$

14

Exercice 2 : 4,5 points **CC1 14 avril 2017**

Etudier la **dérivabilité** et calculer la **dérivée** des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $g(x) = \begin{cases} x.ln(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ c) $h(x) = arccos\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$

Exercice 2 : 4,5 points

1,5

a) $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$x \in D_f \iff x \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

0,5 d'où $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$

① arctan est d° sur $D_f = \mathbb{R}^*$ car d° sur $\mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ est d° sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$

② d'où aussi $x \longmapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est d° sur $\mathbb{R}^*$.

0,5 de ① et ②, $\boxed{f \text{ est d° sur } D_f = \mathbb{R}^*}$

(pas d'étude de dérivabilité en 0 car $0 \notin D_f$)

0,5 et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{f'(x)} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \boxed{= 0}$

1,5 **b)** 1,5 pts $g(x) = \begin{cases} x.\ln(x) & , x>0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ $D_g = \{(x>0 \text{ et } x \in D_{\ln}) \text{ ou } x=0\}$ $= \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$

$\boxed{D_g = \mathbb{R}^+}$

0,5 $\underline{x>0:}$

0,5 $\left.\begin{array}{l}\ln \text{ est } d^{ble} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ id \text{ aussi sur } \mathbb{R}\end{array}\right\}$ donc $\boxed{g\ d^{ble} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ par $\times$ de f^{ct}s d^{bles}.

$\underline{x \text{ en } 0^+:}$

0,5 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x\neq 0}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x\neq 0}} \frac{x.\ln x - 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\boxed{\text{d'où } g \text{ n'est pas } d^{ble} \text{ en } 0}$

Cl : $\boxed{g \text{ est } d^{ble} \text{ seulement sur } \mathbb{R}_+^*}$

g'(x)=1.ln(x)+x.1/x = ln(x)+1 $\boxed{g'(x) = \ln x + 1}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

c) $h(x) = arccos\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$

$x \in D_h \iff x^{1/3} \in D_{arccos} = [-1,1] \iff x^{1/3} \in [-1,1]$
$\iff 1 \leq x \leq +1$

0,5 d'où $\boxed{D_h = [-1,1]}$

$x \longmapsto x^{1/3}$ est D^{ble} sur $[-1,1] \setminus \{0\}$, à valeurs dans $[-1,1]\setminus\{0\}$

$x \longmapsto x^{1/3}$ est D^{ble} sur $]-1,1[\setminus \{0\}$, à valeurs dans $]-1,1[\setminus \{0\}$

or arccos est D^{ble} sur $]-1,1[$ donc sur $]-1,1[\setminus\{0\}$

1 alors $\boxed{h \text{ est } D^{ble} \text{ sur }]-1,1[\setminus\{0\}}$

→ Reste l'étude en 0, −1 et 1 (qui appartiennent à D_h) :

+1 BONUS $\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $h'(x) = (x^{1/3})' . arccos'(x^{1/3})$

$= \frac{1}{3} x^{-2/3} . \frac{-1}{\sqrt{1-(x^{1/3})^2}}$

$\boxed{\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\} : \boxed{h'(x) = \frac{-1}{3x^{2/3}.\sqrt{1-x^{2/3}}}}}$

d'où $h'(x) \xrightarrow[0]{}$ " $\frac{-1}{3 \times 0 \times 1}$ " $= -\infty$ 6

et $h'(x) \xrightarrow[\pm 1]{}$ " $\frac{-1}{3 \times 1 \times 0}$ " $= -\infty$

d'où h n'est pas $\mathcal{D}^3$ en $0, 1$ ni -1

Cl : $\boxed{h \text{ n'est } \mathcal{D}^3 \text{ que sur }]-1, 0[\cup]0, 1[}$

Exercice 3 : 4,5 points a) **CC2 31 mai 2016** **c) 2018-06-14_MiniCC**

Calculer les développements limités suivants :

a) $DL_3(\cos(x) . \exp(x), 0)$ b) $DL_4\left(\sqrt{\cos(x)}, 0\right)$ c) $DL_2\left(\frac{\ln(1+x)-x}{ch(x)-1}, 0\right)$

1 a) $\cos x . \exp x$ à l'ordre 3.

0,25 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

0,25 $\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

0,5 d'où $\cos x . \exp x = 1 + x + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

$\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1-3}{6} = -\frac{1}{3}$

$\boxed{\cos x . \exp x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)}$

7

1,5 b) dupuydelome.fr $DL_4(\sqrt{\cos x}, 0)$:

0,25 $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

d'où $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}$

0,25 soit $u := -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $o(u^2) \underset{u\to 0}{=} o(x^4)$

0,5 $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 \underset{x\to 0}{+ o(x^4)}$

$= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{2.4!} + o(x^4) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + o(x^4)$

$\frac{1}{48} - \frac{1}{32} = -\frac{1}{96}$

0,5 $\boxed{\sqrt{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4)}$

1,5 + 0,5 BONUS

c) $DL_2\left(\frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{ch}(x) - 1}, 0\right)$

0,25 $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

d'où : $\operatorname{ch}(x) - 1 = +\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

0,25 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

d'où $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

(On va à l'ordre 4 pour $\ln(1+x) - x$ car $\operatorname{ch}(x) - 1$ commence par x^2)

18

d'où $\dfrac{\ln(1+x)-x}{ch(x)-1} = \dfrac{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}$

$= \dfrac{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{\cancel{x^2}\left(+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4!}+o(x^2)\right)}$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}{+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4!}+o(x^2)}$

0,5 $= \left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right) \times \frac{1}{+\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{1+\underbrace{\frac{2x^2}{4!}+o(x^2)}_{:=u}}$

$\dfrac{1}{1+\frac{2x^2}{4!}+o(x^2)}$:

on pose $\boxed{u := +\frac{2x^2}{4!}+o_{x\to 0}(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{et } o(u) = o(x^2) \;!!}$

0,25 d'où $\dfrac{1}{1+u} = 1-u+o_{u\to 0}(u)$ suffit !!

d'où $\dfrac{1}{1+u} = 1 - \frac{2x^2}{4!} + o_{x\to 0}(x^2)$

0,25 d'où $\dfrac{\ln(1+x)-x}{ch(x)-1} = \left(-1+\frac{2}{3}x-\frac{2}{4}x^2+o(x^2)\right)\times\left(1-\frac{2x^2}{4!}+o(x^2)\right)$

$\left(\frac{2}{4!} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}\right)$

$= -1 + \frac{1}{12} x^2 + o(x^2)$

$+ \frac{2}{3} x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{12} x^3 + o(x^2)$

$- \frac{2}{4} x^2 + o(x^2)$

$+\frac{1}{12} - \frac{1}{2}$

$= \frac{-6}{12} + \frac{1}{12} = \frac{-5}{12}$

$= -1 - \frac{5}{12} x^2 + \frac{2}{3} x + o(x^2)$

d'où

0,5

$$\boxed{\frac{\ln(1+x) - x}{ch(x) - 1} \underset{x \to 0}{=} -1 + \frac{2}{3} x - \frac{5}{12} x^2 + o(x^2)}$$

Exercice 4 : 5,5 points **Quizz 4 G3 2017-2018**

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ *avec* $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

1 a) Montrer que f est croissante sur son domaine de définition.

1,5 b) Montrer que $f([1,3]) \subset [1,3]$.

2 c) Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

1 d) Tracer un graphique montrant la convergence de la suite (u_n).

1pt a) $D_f = \mathbb{R}_+$

$\sqrt{\ }$ est $\nearrow$ strict^t d'où $x \longmapsto 1+\sqrt{\ }$ est $\nearrow$ strict^t

$\Rightarrow \boxed{f \nearrow \text{ sur } D_f}$

10

1,5 b) 2 $f \nearrow$ strictement et $\sqrt{\ }$ est $\mathcal{C}^0$ et $\nearrow$ aussi sur D_f

d'où f est $\mathcal{C}^0$ sur D_f 2

d'où (Th de la bijection) : $f([1,3]) = [f(1), f(3)]$ 2
$= [2, 1+\sqrt{3}]$

$2 \in [1,3]$ ✓

$1 \leq 1+\sqrt{3} \leq 3 \iff 1 \leq 1+\sqrt{3}$ ✓ et $\sqrt{3} \leq 2$
vrai $\iff 3 \leq 4$ ✓

d'où 2 $\boxed{f([1,3]) \subset [1,3]}$

c) On a $f \nearrow$ et $\mathcal{C}^0$ sur $D_f = \mathbb{R}_+$

d'où :

1
- ✓ $f \nearrow$ ✓ f $\mathcal{C}^0$ sur $[1,3]$
- ✓ $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- ✓ $u_0 = 2 \in [1,3]$
- ✓ $f([1,3]) \subset [1,3]$

d'où $\boxed{(u_n)}$ est (monotone) et $\boxed{CV}$

11

vers $\ell \in [1,3]$ // $\boxed{f(\ell)=\ell}$

$f(\ell)=\ell \iff \ell = 1+\sqrt{\ell}$

$\iff \ell-1=\sqrt{\ell}$

$\ell-1\geq 0$ $\iff (\ell-1)^2=\ell$

$\iff \ell^2-2\ell+1=\ell$

$\iff \boxed{\ell^2-3\ell+1=0}$

0,5 $\Delta = 9-4=5 \Rightarrow \ell_{1,2} = \frac{+3\pm\sqrt{5}}{2}$

0,5 $\frac{+3-\sqrt{5}}{2} < 1 \notin [1,3]$ d'où $\boxed{\ell = \frac{+3+\sqrt{5}}{2}}$ $\rightarrow$

$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \geq 1$

$\iff \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\iff 1 \geq \sqrt{5}$

$\iff 1 \geq 5$

$\Rightarrow$ FAUX

d'où $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$

d'où $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \notin [1,3]$

1 d)