Pr. Morad LAKHSSASSI

ANALYSE 2

EXAMEN FINAL

Durée 2h

CPI 1

2017 - 2018

26 juin 2018

CORRIGÉ

Exercice 1 : 3,5 points

$(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$: $a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, $b_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

2,5 pts a) Adjacentes :

1pt * $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n \overset{0,25}{=} \sum_{k=(n+1)+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

$$= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$= \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \cancel{\sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k}}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \cancel{\sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k}}\right)$$

$$\overset{0,25}{=} \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2n+1+2n+2}{(2n+2)(2n+1)} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{4n+3}{4n^2+6n+2} - \frac{1}{n+1}$$

et : $a_{n+1} - a_n \geq 0 \iff \frac{4n+3}{4n^2+6n+2} \geq \frac{1}{n+1}$

$$\iff (4n+3)(n+1) \geq 4n^2+6n+2$$

$$\iff \cancel{4n^2} + 7n+3 \geq \cancel{4n^2} + 6n+2$$

$$\iff n+1 \geq 0 \text{ vrai } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

0,5 d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \geq a_n$

L2

ou Beaucoup plus simple :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

d'où $\boxed{(a_n) \text{ est croissante}}$ ①

1pt * De même, $\forall n \geq 1$, $\quad b_{n+1} - b_n \overset{0,25}{=} \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

$$\overset{0,25}{=} \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

or $\frac{1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n}$,

donc $\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \leqslant 2 \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$

d'où $b_{n+1} - b_n \leqslant 0 \quad , \forall n \geq 1$

0,5 d'où $\boxed{(b_n) \text{ est décroissante}}$ ②

0,5pts * De plus, $\forall n \geq 1$, $\quad a_n - b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

$$= -\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

0,25 d'où $\boxed{a_n - b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ ③

0,25 Enfin, ①, ② et ③ donnent que $\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes}}$.

1pt b) On en déduit qu'elles convergent vers la même limite.

Exercice 2 : 4,5 points

1,5 pts a) $DL_4(x^2 \cdot e^{2x}, 0)$:

0,5 On a : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ (ordre 2 ici suffira)

et $2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, d'où on peut remplacer x par $2x$:

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}((2x)^2) \quad \text{et } \underset{x\to 0}{o}((2x)^2) = \underset{x\to 0}{o}(4x^2) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

0,5 avec justif. d'où, $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

0,5 d'où, $\boxed{x^2 \cdot e^{2x} = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$ car $x^2 \cdot o(x^2) = o(x^4)$

1,5 pts b) $DL_3(\mathrm{th}(x), 0)$:

0,5 $\forall x \in V(0)$, $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{1 + \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}$

on pose $\boxed{u := \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} \xrightarrow[x\to 0]{\text{mq :}} 0$

et on a : $\boxed{o(u) = o(x^2)}$ ne suffit pas et $\boxed{o(u^2) = o(x^4)}$

d'où $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x) \times \frac{1}{1+u}$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$$

$$u^2 = \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \quad (u \times u)$$

d'où $\frac{1}{1+u} = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) + \underbrace{\frac{x^4}{4!} + o(x^4) + o(x^4)}_{= o(x^3)}$

0,5 d'où : $\dfrac{1}{1+u} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$

et : $\mathrm{th}(x) = \left(x + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \times \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$

$= x - \dfrac{x^3}{2} + o(x^4)$

$+ \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

$= x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

0,5 $\boxed{\mathrm{th}(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}$

Remarques : • th(0) = 0
• th est impaire
⇒ monômes impairs

(m) Par f.T.Y.

1,5 pb c) $DL_3\left(x\cdot\left(\sqrt{1+\sin(x)}\right)^3, 0\right)$:

idée 0,25 $\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^3 = (1+\sin x)^{3/2}$

remarque : on veut un DL_3, il suffit un DL_2 de $(1+\sin x)^{3/2}$ car il sera multiplié par x après.

On a :

0,25 $1 + \sin x = \underbrace{1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$ $\quad (\sin x = x + o(x^2))$

on pose $:= u \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

on a $o(u) = o(x)$, $\boxed{o(u^2) = o(x^2)}$

$1 + \sin x = 1 + u$ $\quad \alpha(\alpha-1)\dfrac{u^2}{2!}$ avec $\alpha = \dfrac{3}{2}$

On a : $(1+u)^{3/2} = 1 + \dfrac{3}{2}u + \overbrace{\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}-1\right)\dfrac{u^2}{2!}} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$

0,5 $= 1 + \dfrac{3}{2}u + \dfrac{3}{8}u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$

d'où : $(1+\sin x)^{3/2} = 1 + \dfrac{3}{2}\left(x + o(x^2)\right) + \dfrac{3}{8}\left(x + o(x^2)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

$= 1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{8}\left(x^2 + o(x^2)\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

0,25 $(1+\sin x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

d'où $x.\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^3 = x.\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)\right)$

0,25 $\boxed{x.\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^3 = x+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}$

Autre méthode:

idée 0,25 $\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{\underbrace{1+x+o(x^2)}_{0,25}} = \sqrt{1+u}$ avec $u = \underset{x\to 0}{x+o(x^2)}$, $o(u)=o(x)$ et $o(u^2)=o(x^2)$

0,25 $= 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2)$

$= 1+\frac{1}{2}\left(x+o(x)\right)-\frac{1}{8}\left(x^2+o(x^2)\right)+o(x^2)$

0,25 $= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$

d'où $\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^3 = \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)^3$ ainsi $\left(\sqrt{1+u}\right)^3 = (1+u)\sqrt{1+u}$

$= \left(1+x+o(x^2)\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)$

$= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$

$+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$+o(x^2)$

0,25 $= 1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$

0,25 d'où $x.\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^3 = x+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x^3+o(x^3)$

Exercice 3 : 4,5 points

1,5 pts a) On sait que $1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

or $\arcsin x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

0,5 justif d'où $1 - \cos(\arcsin x) \underset{0}{\sim} \frac{(\arcsin x)^2}{2}$

or $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$, donc $(\arcsin x)^2 \underset{0}{\sim} x^2$ (puissance $2 \in \mathbb{Z}$)

0,25 justif d'où $1 - \cos(\arcsin x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

On a aussi $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

0,25 justif. d'où $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$

0,25 (d'où $\boxed{\frac{1-\cos(\arcsin x)}{\ln(1+x^2)} \underset{0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}}$

(et $\frac{1}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$), d'où :

0,25 ($\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(\arcsin x)}{\ln(1+x^2)} = \frac{1}{2}$

1,5 pts b) On sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

et $\ln(1+x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (on remplace x par $\ln(1+x)$)

0,5 (justif) d'où $\ln\left(1+\ln(1+x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

0,4 (justif) d'où $\ln\left(1+\ln(1+x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} x$

0,2 d'où $\boxed{\ln x \cdot \ln\left(1+\ln(1+x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x}$

or $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (limite usuelle (en 0^+))

0,2 (justif) donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln x \cdot \ln\left(1+\ln(1+x)\right) = 0$

ou

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \Rightarrow \ln(1+x) = x + \underset{0}{o}(x)$

$\Rightarrow 1+\ln(1+x) = 1+x+o(x)$

$\Rightarrow \ln(1+\ln(1+x)) = \ln(1+\underbrace{x+o(x)}_{:=u \xrightarrow[x\to 0]{} 0})$

$\Rightarrow \boxed{\ln(1+\ln(1+x))} \underset{0}{\sim} x+o(x) \underset{0}{\sim} x$

1,5 pts c) lorsque $x \longrightarrow +\infty$, $\frac{3}{x}$ et $\frac{5}{x} \longrightarrow 0$

d'où $\cos\left(\frac{3}{x}\right)$ et $\cos\left(\frac{5}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

0,5 (justif) on peut donc écrire $\ln\left(\cos\frac{3}{x}\right) = \ln\left(1+\cos\left(\frac{3}{x}\right)-1\right)$

avec $\cos\left(\frac{3}{x}\right)-1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$

0,5 (justif) donc $\ln\left(1+\left(\cos\left(\frac{3}{x}\right)-1\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{3}{x}\right)-1$

de même $\ln\left(\cos\left(\frac{5}{x}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{5}{x}\right)-1$

or $\cos u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$ et $u := \frac{3}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

0,5 (jus) donc $\cos\left(\frac{3}{x}\right)-1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{(3/x)^2}{2}$

de même, $\cos\left(\frac{5}{x}\right)-1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{(5/x)^2}{2}$

0,5 d'où $$\boxed{\frac{\ln\left(\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{5}{x}\right)\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}}$$

0,5 d'où $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{5}{x}\right)\right)} = \frac{9}{25}$$

ou $\ln\left(\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right) \underset{\text{car } \cos\left(\frac{3}{x}\right)>0 \text{ au } V(+\infty)}{=} \ln\left(\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{3}{x}\right)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1-\underbrace{\sin^2\left(\frac{3}{x}\right)}_{\underset{+\infty}{\longrightarrow} 0}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(-\sin^2\left(\frac{3}{x}\right)\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}\right)^2$

Exercice 4 : 4,5 points

1pt a) $f(x) = \arctan(\ln(x))$

0,5 $x \in D_f \iff x \in \underset{\mathbb{R}_+^*}{\underset{\parallel}{D_{\ln}}}$ et $\ln(x) \in \underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{D_{\arctan}}}$ ✓

$\iff x \in \mathbb{R}_+^*$

0,5 d'où $\boxed{D_f = \mathbb{R}_+^*}$

1,5 pts b) **1ère méthode :** On montre que f est $\mathcal{C}^0$ et strictement monotone.

$\ln$ est D^0 sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$

et $\arctan$ est D^0 sur $\mathbb{R}$

0,5 $\mathcal{C}^0$ donc $\arctan(\ln) = f$ est D^0 sur D_f, d'où f est $\mathcal{C}^0$ sur D_f.

De plus, f est $D^{\circ s}$ sur D_f et :

0,5 $D^{\circ s}$ $\forall x \in D_f = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \ln'(x) . \arctan'(\ln(x))$

$= \frac{1}{x} . \frac{1}{1+(\ln(x))^2} > 0$ car $x>0$

0,5 justif d'où f est strict^t $\nearrow$, d'où strictement monotone sur D_f (2)

0,5 d'où, de (1) et (2) $\boxed{f \text{ est bijective sur } D_f}$

2ème méthode (Comme en algèbre) :

0,5 $\ln : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$D_f = \mathbb{R}_+^*$

0,5 or $\ln$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$
et arctan est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

0,5 donc $\boxed{f = \arctan(\ln) \text{ est bijective}}$. (de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$)

1pt c) $g = f^{-1}$.

1ère méthode : on veut $g(1) = f^{-1}(1) = x$

$x = f^{-1}(1) \Longleftrightarrow f(x) = 1$

0,5 justif $\Longleftrightarrow \arctan(\ln(x)) = 1$

or $\arctan(\ln(x)) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\Longleftrightarrow \tan(\arctan(\ln x)) = \tan 1$

0,5 justif or $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\Longleftrightarrow \ln(x) = \tan 1$

or exp est bijective donc $\iff e^{\ln x} = e^{\tan 1}$

d'où $x = e^{\tan 1}$

d'où $\boxed{g(1) = e^{\tan 1}}$

$2^{ème}$ méthode : on a f est bijective de $D_f = \mathbb{R}_+^*$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\arctan(\ln) : \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{\arctan}]-\pi/2, \pi/2[$$
$$x \longmapsto \ln x \longmapsto \arctan(\ln(x))$$

d'où $f^{-1} = (\arctan(\ln))^{-1} = \ln^{-1}(\arctan^{-1})$ $\left((g\circ f)^{-1} = f^{-1} g^{-1}\right)$

$= \exp(\tan)$

d'où $f^{-1}(1) = \exp(\tan(1))$

d'où $g(1) = e^{\tan(1)}$

1,2 d) Il est demandé d'en déduire $g'(1) = (f^{-1})'(1)$

d'où on ne peut utiliser la méthode de calcul de g', puis l'appliquer à 1 !!

$$g'(1) = (f^{-1})'(1) \quad \text{or} \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

d'où $g'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \dfrac{1}{f'(g(1))} = \dfrac{1}{f'(e^{\tan(1)})}$

dans b) : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + \ln^2(x)}$

d'où : $f'\left(e^{\tan(1)}\right) = \dfrac{1}{e^{\tan(1)}} \cdot \dfrac{1}{1+\left(\ln\left(e^{\tan 1}\right)\right)^2}$

0,5 j $= \dfrac{1}{e^{\tan(1)}} \cdot \dfrac{1}{1+\tan^2(1)}$

$\left(= \dfrac{\cos^2(1)}{e^{\tan(1)}} \right)$

d'où 0,25 $\boxed{g'(1) = \dfrac{e^{\tan(1)}}{\cos^2(1)}}$ $\left(= e^{\tan(1)} \cdot \left(1+\tan^2(1)\right) \right)$

* Remarque :

Vérification : $g = f^{-1} = \exp(\tan)$

d'où $g' = \tan' \times \exp'(\tan) = \dfrac{1}{\cos^2} \cdot \exp(\tan)$

d'où $g'(1) = \dfrac{e^{\tan(1)}}{\cos^2(1)}$ (✓).

Exercice 5 : 2,5 points

$\forall y > x > 0$ Mq $x < \dfrac{x-y}{\ln x - \ln y} < y$ par TAF ou IAF

* Par TAF : { Soient x et y / $y > x > 0$
On prend la fonction $\ln$ entre x et y :

On a $y > x > 0$, d'où $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln$ est $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

1 d'où $\ln$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[x, y]$ et $\mathcal{D}$ sur $]x, y[$,

0,5 d'où d'après le TAF : $\exists c \in]x, y[\ / \ \ln'(c) = \dfrac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x}$

0,5 or $\ln'(c) = \dfrac{1}{c}$ et $c \in]x, y[$, donc $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$ d'où $\dfrac{1}{y} < \dfrac{\ln y - \ln x}{y - x} < \dfrac{1}{x}$

(ou) $\Rightarrow x < c < y$ d'où le résultat final.

0,5 or x et $y > 0$, d'où $\boxed{x < \dfrac{y-x}{\ln y - \ln x} < y}$ vrai $\forall y > x > 0$

2ème méthode : Par l'IAF :

Soient $y > x > 0$

1 $\ln$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[x,y]$ et $\mathcal{D}^s$ sur $]x,y[$

0,5 et $\forall t \in]x,y[$, $\dfrac{1}{y} < \ln'(t) = \dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{x}$

0,5 d'où $\dfrac{1}{y} < \dfrac{\ln(y) - \ln(x)}{y-x} < \dfrac{1}{x}$

0,5 d'où $\boxed{x < \dfrac{y-x}{\ln y - \ln x} < y}$ vrai $\forall y > x > 0$.