31 mai 2016

Contrôle Continu 2
Analyse 2
Développements Limités

CPI 1

Exemple de CORRIGÉ :

## Questions de cours : 3 pts

a) Formule de Taylor-Young : 0,5 pt

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$.

Alors $\forall x \in I$, on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}(x-a)^n$$

(ou au lieu de $\underset{x\to a}{o}(x-a)^n$, $\varepsilon(x).(x-a)^n$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$)

b) Définition d'un $DL_n(f,a)$ : 0,5 pt

Soit $I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que $f$ admet un $DL_n(f,a)$ (développement limité de $f$ en $a$ à l'ordre $n$) si :

$\exists\, c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in I$ :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + o(x-a)^n$$

c) $DL_{2n+1}(\cos(x), 0)$ : 0,75 pt

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \underset{x\to 0}{+ o}(x^{2n+1})$$

d) $DL_n(\ln(1+x), 0)$ : 0,75 pt

$$\forall x \in ]-1,+\infty[, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \underset{x\to 0}{+ o}(x^n)$$

e) $DL_n((1+x)^\alpha, 0)$ : 0,5 pt

$\forall x \in I$, $I$ dépend de $\alpha$ :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \underset{x\to 0}{+ o}(x^n)$$

## Exercice 2 : 6 points

Développements Limités **en 0** :

a) $\cos(x).\exp(x)$ à l'ordre 3 : 1,5 pts

on a :

0,5 $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$

0,5 $\exp(x) \underset{x\to 0}{=} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

d'où $\cos(x).e^x = 1 + x + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{2} \underset{x\to 0}{+ o}(x^3)$

0,5 $$\boxed{\cos(x).\exp(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} \underset{x\to 0}{+ o}(x^3)}$$

b) $\sqrt{\cos(x)}$ à l'ordre 2 : 1,5 pt

On a : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (on aurait pu écrire $o(x^3)$ au lieu de $o(x^2)$)

d'où $\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$

On pose $u := -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

alors $u \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

d'où $\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1+u}$ avec $u \to 0$

0,75 $= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$ on ne va pas plus car

on voit que dans $u^2$ la petite puissance est $x^4$.

Remarque : on aurait même pu nous arrêter à $\frac{1}{2}u + o(u)$.

0,5 d'où $\sqrt{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underbrace{- \frac{1}{8}\left(\frac{-x^2}{2} + o(x)\right)^2 + o(u^2)}_{= o(x^2)}$

0,75 $\boxed{\sqrt{\cos(x)} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)}$

c) $\dfrac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{ch}(x) - 1}$ à l'ordre 2 : 1,5 pt

On a :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ d'où $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ d'où : $\operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

d'où : $\dfrac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{ch}(x) - 1} = \dfrac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \dfrac{-\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)}$ ordre insuffisant

il faut aller au moins à l'ordre 4 car on divise par $x^2$ en haut et en bas :

0,5 $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$\operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

d'où : $\dfrac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{ch}(x) - 1} = \dfrac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)}{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)}$

$= \dfrac{-1 + \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)}$

On pose :

0,5 $\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{12}+o(x^2)} = \dfrac{1}{1+u}$ avec $u = \frac{x^2}{12} + o(x^2)$

on a $u \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

d'où $\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{12}+o(x^2)} = 1 - u + o(u)$ (On cherche l'ordre 2 en $x$)

$$= 1 - \frac{x^2}{12} + \underbrace{o\left(\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right)}_{=o(x^2)}$$

d'où $\dfrac{\ln(1+x)-x}{ch(x)-1} = \left(-1+\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)$

$$= -1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2) + \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

d'où :

0,5 $$\boxed{\frac{\ln(1+x)-x}{ch(x)-1} = -1 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{12}x^2 + o(x^2)}$$

d) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$ à l'ordre 2 : 1,5 pt

0,5 On a : $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} = \exp\left(\dfrac{3}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\right)$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$

d'où $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{5!} + o(x^5)$

d'où : $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^5)\right)$

On pose $u := -\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^5) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

or $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ (sera suffisant)

d'où $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = -\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^5) - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^5)\right)^2 + o(u^2)$

d'où $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{x^4}{36} + o(x^5)\right)}_{u^2} + o(u^2)$

$o(u^2) = o\left(\frac{x^4}{36} + o(x^5)\right) = o(x^4)$

d'où $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{64} + \underbrace{o(x^5) + o(x^4)}_{o(x^4)}$

$= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{8}\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{8}\right) + o(x^4)$

$= -\frac{x^2}{6} + x^4 \frac{-7}{8 \times 120} + o(x^4)$

9r

d'où : $\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{7 \times 3}{8 \times 120}x^2 + o(x^2)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{21}{960}x^2 + o(x^2)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{7}{320}x^2 + o(x^2)$

d'où $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} = \exp\left(\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{320}x^2 + o(x^2)\right)$

$= +\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \exp\left(\underbrace{-\frac{7}{320}x^2 + o(x^2)}_{u \xrightarrow[x \to 0]{} 0}\right)$

$= +\frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 + u + o(u)\right)$

9r

$= +\frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \frac{7}{320}x^2 + o(x^2) + o(x^2)\right)$

$$\boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{7}{320\sqrt{e}}x^2 + o(x^2)}$$

# Exercice 3 : 6 points

a) $DL_2(e^x, 1)$ : 1,5 pt

0,5 On pose $h := x - 1$, d'où $h \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

d'où $e^x = e^{h+1} = e \cdot e^h = e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)$

$= e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 \underset{x \to 1}{+} o(x-1)^2$

$$\boxed{e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 \underset{x \to 1}{+} o(x-1)^2}$$

b) $DL_3(\ln(3+5x), 1)$ : 1,5 pt

On pose $h := x - 1$, d'où $h \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

$\ln(3+5x) = \ln(3 + 5(h+1)) = \ln(8 + 5h)$

$= \ln\left(8\left(1 + \frac{5}{8}h\right)\right)$

0,5 $= \ln 8 + \ln\left(1 + \frac{5}{8}h\right)$

On pose $u := \frac{5}{8}h$, $u \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

0,5 d'où $\ln(3+5x) = \ln 8 + \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)\right)$

$= \ln 8 + \frac{5}{8}h - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}h\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{8}h\right)^3 + o\left(\frac{5}{8}h\right)^3$

$= \ln 8 + \frac{5}{8}h - \frac{25}{128}h^2 + \frac{125}{1024}h^3 + o(h^3)$

0,5 d'où : $\boxed{\ln(3+5x) = \ln 8 + \frac{5}{8}(x-1) - \frac{25}{128}(x-1)^2 + \frac{125}{1024}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$ 1

c) $DL_6(\arcsin(\ln(1+x^2)), 0)$ : 1,5 pt

on a : $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$ $(u := x^2)$

d'où : $\arcsin(\ln(1+x^2)) = \arcsin\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right)$

0,5 on a : $\forall u \in ]-1,1[$, $\arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

$= (1-u^2)^{-1/2}$

DL de $(1-u^2)^{-1/2}$ en 0 :

$(1-u^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(-u^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-u^2)^2 \underset{u\to 0}{+ o(u^4)}$

$= 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{8}u^4 + o(u^4)$

d'où $\arcsin'(u) = 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{3}{8}u^4 + o(u^4)$

0,5 d'où $\arcsin(u) = u + \frac{u^3}{6} + \frac{3}{40}u^5 + o(u^5)$ $(\arcsin 0 = 0)$

soit $u := x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$, alors $u \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

d'où $\arcsin(\ln(1+x^2)) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) + \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right)^3 + o(u^3)$

$= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) + \frac{1}{6}(x^6 + o(x^6)) + \underbrace{o(x^6 + o(x^6))}_{= o(x^6)}$

0,5 d'où : $\boxed{\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6)}$

d) $DL_6\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, +\infty\right)$ : 1(pt) Erreur dans l'énoncé, il était voulu $DL_2$ seulement

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

on pose $u := \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

d'où $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^7}{7} \underset{u\to 0}{+ o(u^7)}$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{6x^6} + \frac{1}{7x^7} \underset{x\to+\infty}{+ o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^7\right)$$

d'où : $\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{5x^4} - \frac{1}{6x^5} + \frac{1}{7x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)$

$u := \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$= e.\exp\Big(\underbrace{-\frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} - \frac{u^3}{4} + \frac{u^4}{5} - \frac{u^5}{6} + \frac{u^6}{7} + o(u^6)}_{:= v \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}\Big)$$

$v := -\frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} - \frac{u^3}{4} + \frac{u^4}{5} - \frac{u^5}{6} + \frac{u^6}{7} + o(u^6)$

$$= e.\left(1 + v + \frac{v^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \frac{v^4}{4!} + \frac{v^5}{5!} + \frac{v^6}{6!} + o(v^6)\right)$$

d'où : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to+\infty}{=} e.\Big[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} - \frac{u^3}{4} + \frac{u^4}{5} - \frac{u^5}{6} + \frac{u^6}{7} +$

$\frac{1}{2}\Big(\frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{8} - \frac{u^5}{10} + \frac{u^6}{12} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{9} - \frac{u^5}{12} + \frac{u^6}{15}$

$+ \frac{u^4}{8} - \frac{u^5}{12} + \frac{u^6}{16} - \frac{u^5}{10} + \frac{u^6}{15} + \frac{u^6}{12}\Big)$

$$+ \frac{1}{6}\left(v^3\right) + \frac{v^4}{4!} + \frac{v^5}{5!} + \frac{v^6}{6!} + o(v^6)\Big]$$

Calcul trop lent !!

$\Rightarrow DL_2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, +\infty\right)$ :

95 $$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où : $$\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \exp(1)\times\exp\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$u := \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$= e.\exp\Big(\underbrace{-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)}_{:=v \xrightarrow[u\to 0]{} 0}\Big)$$

$$= e.\left(1+v+\frac{v^2}{2}+o(v^2)\right)$$

95 $$\longrightarrow = e\times\left[1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)+\frac{1}{2}\left(-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)\right)^2 + o\left(-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)\right)^2\right]$$

$$= e.\left[1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{4}+o(u^2)\right) + o\left(\frac{u^2}{4}+o(u^2)\right)\right]$$

$$= e.\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

d'où :
95 $$\boxed{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to+\infty}{=} e - \frac{e}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{11e}{24}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

## Exercice 4 : 1,5 points

0,5 pt $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}, \text{ on pose } u = -x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$= (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

0,5 pt $$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

d'où : $$\cos(x) - \sqrt{1-x^2} = x^4\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right) + o(x^4)$$

$$= + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

d'où : $$\frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$$

0,5 d'où : $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}}$$

## Exercice 5 : 2 points

$$f(x) = \exp(x) + \sin(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}_{= o(x^2)}$$

0,75 $$= 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

d'où l'équation de la tangente à la courbe de $f$ en $0$ :

0,5 $$\boxed{y = 1 + 2x}$$

et $f(x) - y = \frac{x^2}{2} + o(x^2) > 0$

0,75 d'où $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente en } 0.}$

Exercice 1 : 1,5 points

Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$ pour $x > -1$.

On remarque que : $\sqrt{1{,}01} = \sqrt{1+0{,}01}$ , on pose $x := 0{,}01$
$= f(0{,}01)$

l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

si $|f^{(n+1)}|$ est majorée par un réel $M$ sur un intervalle $I$,
alors $\forall a, x \in I$, on a : $|f(x) - T_n(x)| \leq M \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

on prend :
$x := 0{,}01$
$a := 0$

d'où on écrit le DL de $\sqrt{1+x}$ en $0$ :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \underset{x \to 0}{=} \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}}_{T_2(x)} + o(x^2) = T_2(x) + o(x^2)$$

0,5 d'où $\left| f(0{,}01) - T_2(0{,}01) \right| \leq M \cdot \dfrac{(0{,}01)^3}{3!}$

or $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$

$x = 0{,}01 \in [0,1]$, donc $|f''(x)| \leq \dfrac{1}{4}$, $\forall x \in [0,1]$

d'où $M = \dfrac{1}{4}$ majore $|f''(x)|$ sur $[0,1]$

d'où $\boxed{\underbrace{\left| f(0{,}01) - T_2(0{,}01) \right|}_{0{,}25} \leq \underbrace{\dfrac{(0{,}01)^3}{4 \times 3!}}_{0{,}5} = \dfrac{(10^{-2})^3}{4 \times 6}}$

$= \dfrac{10^{-6}}{24} < 10^{-6}$ 0,5

d'où $T_2(0{,}01)$ approche $f(0{,}01) = \sqrt{1{,}01}$ à $10^{-6}$ près

0,25 $T_2(0{,}01) = 1 + \dfrac{0{,}01}{2} - \dfrac{(0{,}01)^2}{8} = 1 + 0{,}005 - \dfrac{0{,}0001}{8}$

et $\frac{0{,}0001}{8} = \frac{0{,}00005}{4} = \frac{0{,}000025}{2} = 0{,}0000125$

d'où : $T_2(0{,}01) = 1{,}0050125$

0,25 d'où : $\boxed{\sqrt{1{,}01} \simeq 1{,}0050125 \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}}$