Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES
Nous innovons pour votre réussite !

Algèbre 2
Examen

AU 2015-2016
CPI 1
Durée : 2h

Exercice 1 (2pt) :

1. Calculer $pgcd(18480,9828)$.
2. Trouver U et V tels que : $18480\,U + 9828\,V = 84$.

Exercice 2 (3pt) :

Soient $a \geq 1, b \geq 1$. Montrer que :

1. $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$
2. 2^{p-1} premier $\Rightarrow p$ premier
3. $pgcd(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{pgcd(a,b)} - 1$.

Exercice 3 (3pt) :

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} x + y = 100 \\ pgcd(x,y) = 10 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} ppcm(x,y) = 60 \\ pgcd(x,y) = 5 \end{cases}$

Exercice 4 (4pt) :

Résoudre les équations suivantes :

a) $Q^2 = XP^2$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$
b) $PoP = P$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$
c) $P'^2 = 4P$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$
d) $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 5 (4pt) :

Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{N}$

$$a | b \Leftrightarrow X^a - 1 | X^b - 1$$

Exercice 6 (4pt) :

Soit le polynôme $P = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$.
On se propose de trouver, dans $\mathbb{C}$, x_1, x_2, x_3 les racines de P sachant que $x_1 + x_2 = x_3$.

1. Ecrire le système d'équations qui donne la relation entre les racines de P, ses coefficients et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les expressions symétriques en x_1, x_2, x_3.
2. En utilisant $x_1 + x_2 = x_3$ monter que : $x_1 + x_2 = 4$ et $x_1 x_2 = 7$.
3. Trouver x_1, x_2 et x_3.