Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES
Nous innovons pour votre réussite !

Algèbre 2
Test N° 1

AU 2015-2016
CPI 1
Durée : 2h

Questions de cours :

a) Soient a et b deux entiers.
   - Définir $pgcd(a,b)$ et $ppcm(a,b)$.
   - Comment monter que a et b sont premiers entre eux de deux façons différentes.

b) Décrire l'algorithme d'Euclide pour calculer $pgcd(a,b)$.

c) Donner une méthode pour calculer $ppcm(a,b)$.

d) Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
   - Donner les coefficients du polynôme $P.Q$ en fonction des coefficients de P et de Q.
   - Donner les coefficients du polynôme $(P.Q)'$ en fonction des coefficients de P et de Q.

Exercice 1 :

a) Montrer que : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (ab) \wedge (a+b) = 1$.

b) Soit n un entier ≥ 2 tel que $2^n - 1$ est premier.
   Montrer que n est nombre premier.

c) Montrer que :
   $(n^2 + n) \wedge (2n+1) = 1$ et $(3n^2 + 2n) \wedge (n+1) = 1$

Exercice 2 :

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6$.

b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\begin{cases} pgcd(a,b) = 5 \\ ppcm(a,b) = 80 \end{cases}$

Exercice 3 :

a) Soit n un entier. On pose $P_n = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X(X+1) + \cdots + \frac{1}{n!}[X(X+1)\ldots(X+n-1)]$.
   Montrer que : $P_n = \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\ldots(X+n)$.

b) Développer le polynôme $Q_n = (1+X)(1+X^2)\ldots(1+X^{2^n})$.

c) Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.