

Question de cours (4pt) :

- Soient a et b deux entiers.
 - Définir $pgcd(a,b)$ et $ppcm(a,b)$.
 - Comment montrer que a et b sont premiers entre eux de deux façons différentes.
- Décrire l'algorithme d'Euclide pour calculer $pgcd(a,b)$.
- Donner une méthode pour calculer $ppcm(a,b)$.
- Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
 - Donner les coefficients du polynôme $P.Q$ en fonction des coefficients de P et de Q .
 - Donner les coefficients du polynôme $(P.Q)'$ en fonction des coefficients de P et de Q .

Exercice 1 (4pt) :

- Montrer que $21m + 4$ et $14m + 3$ sont premiers entre eux.
- Montrer que $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (ab) \wedge (a + b) = 1$.
- Soit n un entier ≥ 2 tel que $2^n - 1$ est premier.
Montrer que n est nombre premier.

Exercice 2 (4pt) :

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Donner le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 3 (4pt) :

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé P' .

Exercice 4 (4pt) :

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2$$

Calculer le coefficient de X^2 dans le polynôme P_n .