Université Internationale de Casablanca 04 février 2016

Pr. Morad Lakhssassi **Examen Final d'Analyse 1 – Durée 2h** **CPI1**

(Documents et calculatrice non autorisés)

Exercice 1 : étude d'une fonction et sa réciproque : 30 min

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + e^x$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $x \to x$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
   $x \to e^x$ pareil
   d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Puisque qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que f est bijective.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + e^x > 0$, d'où f est strictement monotone et comme elle est continue, elle est donc bijective.

d) Calculer $(f^{-1})'$ en fonction de $\exp(f^{-1})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{1 + \exp(f^{-1}(x))}$$

   d'où, sur $\mathbb{R}$, $(f^{-1})' = \frac{1}{1+\exp(f^{-1})}$.

e) Calculer $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1} (utiliser $fof^{-1} = id$).
   $fof^{-1} = id$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + e^x$
   d'où : $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) + e^{f^{-1}(x)}$ et $f(f^{-1}(x)) = x$, d'où :

$$f^{-1}(x) + \exp\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

   ce qui s'écrit aussi : $f^{-1} + \exp(f^{-1}) = id$
   d'où : $\exp(f^{-1}) = id - f^{-1}$
   d'où, d'après d), sur $\mathbb{R}$:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{1 + id - f^{-1}}$$

   C'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x-f^{-1}(x)}$.

f) Calculer $f(0)$ et $(f^{-1})'(1)$.
   $f(0) = 0 + e^0 = 1$ (remarque : d'où : $f^{-1}(1) = 0$)

   et en utilisant d) :

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} = \frac{1}{1 + \exp(f^{-1}(1))} = \frac{1}{1 + \exp(0)} = \frac{1}{2}$$

   Autre méthode en utilisant e) :

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{1 + 1 - f^{-1}(1)} = \frac{1}{2}$$

   En déduire l'équation de la tangente au graphe de f^{-1} au point d'abscisse $x_0 = 1$.
   L'équation de la tangente :

$$\frac{y - f^{-1}(1)}{x - 1} = (f^{-1})'(1)$$

   d'où : $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1)$, d'où : $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Exercice 2 : dérivabilité : 25 min

Considérons la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{e^x - 1}$

a) Donner le domaine de définition de f.

Le domaine de définition de f correspond à :

$\{x \in \mathbb{R} \,/\, e^x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\}$ car $x \rightarrow e^x$ est une fonction croissante.

d'où $D_f = \mathbb{R}^+$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme la composition de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ (à détailler comme fait en classe).

On peut avoir un problème de dérivabilité lorsque $e^x - 1 = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = 0$, ailleurs, par composition de fonctions dérivables (à détailler), f est **dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$**.

- En 0 :

On calcule le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\tau_0(f) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} \times \frac{e^x - 1}{x}}$$

d'où : $\lim_{x \to 0^+} \tau_0(f) = \sqrt{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \times e^0}$ (dérivée de exponentielle en 0)

d'où : $\lim_{x \to 0^+} \tau_0(f) = +\infty$.

f n'est donc pas dérivable en 0.

Autre méthode :

On caclule la dérivée et on calcule sa valeur en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{e^x}{2.\sqrt{e^x - 1}}$$

Or $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{2.\sqrt{e^x - 1}} = +\infty$ (par le même calcul que la méthode précédente,

donc f n'est pas dérivable en 0 (tangente verticale en 0).

Exercice 3 : TAF 10 min

Soient x et y deux réels avec $0 < x < y$. Montrer que :

$$x < \frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < y$$

Soit $g(t) = \ln(t)$ définie sur l'intervalle $[x, y]$.

g est une fonction continue sur $[x, y]$ car continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et $x, y \in \mathbb{R}_*^+$,

de même, g est dérivable sur $]x, y[$,

donc d'après le TAF sur $[x, y]$,

$$\exists c \in]x, y[, \qquad g'(c) = \frac{g(y)-g(x)}{y-x}$$

or $g'(c) = \frac{1}{c}$ et $c \in]x, y[$, donc $\frac{1}{y} < g'(c) < \frac{1}{x}$ car x et y strictement positifs, d'où :

$$\frac{1}{y} < \frac{ln(y)-ln(x)}{y-x} < \frac{1}{x}$$

d'où, comme x et y positifs strictement:

$$x < \frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < y$$

Exercice 4 : Limites 25 min

a) Calculer les limites des suites suivantes (justifiez !):

$$u_n = \frac{e^n}{n^n}\ ; \qquad v_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}\ ; \qquad w_n = n!$$

- $u_n = e^{n-nln(n)} = e^{n(1-ln(n))}$ d'où : $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{+\infty\times-\infty} = e^{-\infty} = 0.$
- $v_n = (2+(-1)^n)^{\frac{1}{n}}$, on a : $2-1 \leq 2+(-1)^n \leq 2+1$, d'où : $1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$

  or la fonction $x \to x^{\frac{1}{n}}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$: (car $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1-n}{n}} > 0$),

  donc : $1^{\frac{1}{n}} \leq (2+(-1)^n)^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}}$

  $1^{\frac{1}{n}} = 1$ tend vers 1

  $3^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}.\ln(3)}$ tend vers $e^{0.\ln(3)} = e^0 = 1.$

  d'où, par le théorème des gendarmes, : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$
- $w_n = n! = n.(n-1).(n-2)\ldots.2\times1 \geq n\times1\times1\times\ldots\times1 = n$, d'où : $w_n \geq n.$
  or $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty.$

b) Calculer $\lim_{x\to1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\lim_{x\to1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to1^-} \frac{(\arccos(x))'}{(\sqrt{1-x^2})'} = \lim_{x\to1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x} = 1$$

Exercice 5 : suites adjacentes 15 min

On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\ ;\ \ n \in \mathbb{N}^*,$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*.$$

On admet que $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$.

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$

d'où : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

(u_n) est donc une suite croissante (1)

D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}.\left(2-(n+1)\right) = \frac{1-n}{(n+1)!}$$

d'où : pour $n \geq 2$, $v_{n+1} - v_n < 0$

(v_n) est donc une suite décroissante (à partir de $n = 2$) (2)

Et on a : $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ (3)

(1), (2), et (3) donnent que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

d'où, elles convergent vers une même limite.

Remarque : on ne vous demande pas de calculer cette limite !

Autre méthode :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq u_n$

on montre aussi que (u_n) est croissante, et (v_n) est décroissante comme fait dans la méthode précédente.

et que donc (comme déjà fait en cours et TD), (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) minorée par u_0.

d'où $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent.

et comme les deux suites convergent, $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

or $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$

d'où : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

elles convergents alors vers la même limite.

Conclusion : les deux suites convergent vers la même limite.