Pr. Morad Lakhssassi **Examen Final d'Analyse 1 – Durée 2h** **CPI1**

(Documents et calculatrice non autorisés)

Justifiez toutes vos réponses !

Exercice 1 :

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + e^x$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que f est bijective.
d) Calculer $(f^{-1})'$ en fonction de $\exp(f^{-1})$.
e) Calculer $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1} (utiliser $f o f^{-1} = id$).
f) Calculer $f(0)$ et $(f^{-1})'(1)$.
En déduire l'équation de la tangente au graphe de f^{-1} au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exercice 2 :

Considérons la fonction $f\colon x \to \sqrt{e^x - 1}$

a) Donner le domaine de définition de f.
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 3 : Soient x et y deux réels avec $0 < x < y$. Montrer que :

$$x < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y$$

Exercice 4 :

a) Calculer les limites des suites suivantes (justifiez !):

$$u_n = \frac{e^n}{n^n}\ ; \qquad v_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}\ ; \qquad w_n = n!$$

b) Calculer $\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 5 : On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*,$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*.$$

On admet que $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.