

Durée 2h – Documents, téléphone et calculatrice **non autorisés**

Questions de cours : 4 points

- Enoncer puis démontrer la première inégalité triangulaire.
- Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.
- Donner la définition d'une fonction strictement croissante.
- Donner la définition d'une fonction injective.

Exercice 1 : 3,5 points

Résoudre sur \mathbb{R} :

- $|x - 7| \leq 3$
- $1 \leq \sqrt{3x^2 - 6} \leq 4$
- $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1$

Exercice 2 : 3,5 points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

- Quel est le domaine de définition de f ?
- Etudier la parité de f .

Exercice 3 : 5 points

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

On suppose que $f(a) \leq g(a)$ et $f(b) \geq g(b)$.

- Montrer que : $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$. (3,5 points)
- Tracer un graphique illustratif de cet exercice et l'expliquer brièvement. (1,5 points)

Exercice 4 : 4 points

Soit E la fonction partie entière. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1$.
- Etudier la continuité de f et tracer son graphique.