Université Internationale de Casablanca 14 janvier 2016

Pr. Morad Lakhssassi **C.C 2 d'Analyse 1 – Durée 2h** **CPI1**

(Documents et calculatrice **non autorisés**)

Exercice 1 :

Calculer les limites des suites ci-dessous :

$$u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

$$v_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}$$

$$w_n = \frac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}$$

Exercice 2 :

a) Montrer que la fonction $x \to \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

b) Etudier la dérivabilité de $f(x) = \begin{cases} x.\ln(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

c) Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

d) Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $h(x) = |x|.\sqrt{x^2 - x^3}$.

Exercice 3 :

Montrer que $\forall x > -1, \ \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

Exercice 4 :

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
2. Soient $b \geq a > 0$. Montrer les inégalités suivantes :
$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \text{ et } a \leq \sqrt{ab} \leq b$$
3. Soient $\boldsymbol{u_0}$ **et** $\boldsymbol{v_0}$ des réels **strictement positifs** avec $u_0 < v_0$.
On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n . v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq v_n$.
   b) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = v_n - u_n$.
   a) Montrer que $\forall n \geq 0, \ 0 \leq w_{n+1} \leq \frac{w_n}{2}$.
   b) En déduire que $\forall n \geq 0, \ 0 \leq w_n \leq \frac{w_0}{2^n}$.
   c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} w_n$.
5. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent, et qu'elles ont la même limite.