Université Internationale de Casablanca

01 décembre 2015

Pr. Morad Lakhssassi

DS d'Analyse 1 – Durée 2h

CPI1 - Groupe 2

(Documents et calculatrice non autorisés)

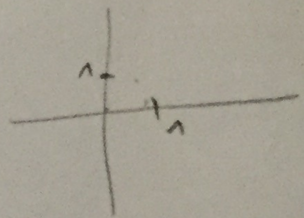
Exercice 1 :

1. Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.
2. Montrer, en utilisant la définition de continuité (avec les ε), que toute fonction lipschitzienne sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$ est continue sur I. $\alpha = \varepsilon$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $x \to (\ln x)^n$ est continue sur son domaine de définition que vous déterminerez. (Utiliser les théorèmes du cours et non la définition de la continuité.)

Exercice 2 :

Soit une fonction $f: [0,1] \to [0,1]$, continue.

Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = x.$



Exercice 3 :

1. Soit f une fonction f T-périodique et g $2T$-périodique, que peut-on dire sur la périodicité de $f+g$? ?

2. Montrer que si f est une fonction bijective de D dans D et impaire, alors sa bijection réciproque f^{-1} est impaire.

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} x.sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x} \qquad 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \ln x . \ln(\ln x) \qquad +\infty$$

fof

croissante

Exercice 5 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que fof est croissante tandis que $fofof$ est strictement décroissante.

Montrer que f est strictement décroissante.