Université Internationale de Casablanca

01 décembre 2015

Pr. Morad Lakhssassi

**DS d'Analyse 1 – Durée 2h**

**CPI1 - Groupe 1**

(Documents et calculatrice non autorisés)

**Exercice 1 :**

1. Donner la définition de la continuité d'une fonction $f$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ (avec les $\varepsilon$).
2. Montrer, en utilisant la définition de la continuité, que si f est continue en $x_0$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha . f$ est continue en $x_0$.
3. Montrer que la fonction $x \to \sqrt{e^x}$ est continue sur son domaine de définition que vous déterminerez. (Utiliser les théorèmes du cours et non la définition de la continuité.)

**Exercice 2 :**

Montrer que si $f$ est paire, alors $gof$ est paire quelle que soit la fonction $g$.

**Exercice 3 :**

1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \sin(x) - \sin(y) = 2. sin\left(\frac{x-y}{2}\right). cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
2. On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leq |x|$.
   Montrer que la fonction $x \to \sin(x)$ est 1-lipschitzienne.

**Exercice 4 :**

Calculer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x. cos(e^x)}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x-\sin(x)}$$

**Exercice 5 :**

Etudier la parité de la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$