

**Questions de cours :**

- 1- Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction.
  - a. Sous quelles conditions  $f$  est-elle injective ?
  - b. Sous quelles conditions  $f$  est-elle surjective ?
- 2- Soit  $(G, *)$  un ensemble muni d'une LCI.
  - a. Que doit vérifier  $(G, *)$  pour qu'il soit un groupe abélien.
  - b. Soit  $H$  une partie de  $G$ . Quand dit-on que  $H$  est sous-groupe de  $(G, *)$ .
- 3- Soit  $(K, +, \times)$  un ensemble muni de deux LCI.  
Quand dit-on que  $(K, +, \times)$  est un corps.

**Exercice 1 :**

1. Montrer que  $(A \text{ et } (B \text{ ou } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C))$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^{2n+2} - 15n - 16$  est divisible par 225.
3. Soit  $x \geq 0$  et  $x \notin \mathbb{Q}$ . Montrer que  $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 2 :**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{cases} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, x^2) \end{cases}$$

1. Calculer les fonctions  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .
2. Les applications  $f$ ,  $g$ ,  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont-elles injectives ? surjectives ?  
bijectives ?

**Exercice 3 :**

1. Trouver tous les  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $(\sqrt{3} + i)^n$  soit réel.
2. Soient  $u$  et  $v$  deux nombres complexes de module 1, tels que  $uv \neq -1$ .  
Montrer que  $z = \frac{u+v}{1+uv}$  est un réel.
3. Trouver les racines quatrièmes de  $z = -119 + 120i$ .

**Exercice 4 :**

Soient  $(A, +, \times)$  un anneau et  $C$  une partie de  $A$  donnée par :

$$C = \{x \in A, \forall y \in A, xy = yx\}.$$

On dit que  $C$  est le centre de  $A$ .

1. Montrer que  $(C, +)$  est un groupe abélien.
2. Montrer que  $C$  est sous-anneau de  $(A, +, \times)$ .