Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES
Nous innovons pour votre réussite !

Algèbre 1
Examen Final

AU 2015-2016
CPI 1
Durée : 2h

Exercice 1 :

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

b) On définit une suite (u_n) par : $u_0 = 1$, $u_1 = \cos\theta$, et pour $n > 2$: $u_n = 2u_1u_{n-1} - u_{n-2}$.
Monter que $u_n = \cos(n\theta)$.

Exercice 2 :

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.
Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 3 :

Soit $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.
Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :
$z_1 = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$
$z_2 = \sin\varphi + i(1 + \cos\varphi)$

Exercice 4 :

Soit $(G,*)$ un groupe abélien de neutre e.
Pour $a \in G$ on note a' sont symétrique.
Soit α un élément de G, différent de e.
On définit une loi $\perp$ en posant : $\forall\, a, b \in G,\ a \perp b = a * b * \alpha$.

Montrer que $(G, \perp)$ est un groupe abélien.

Exercice 5 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on pose :

$$a \perp b = a + b - 1 \quad \text{et} \quad a * b = ab - a - b + 2$$

Montrer que $(R, \perp, *)$ est un corps.