



Questions de cours :

1. Donner le principe de la démonstration par contraposée et par récurrence.
2. Donner la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$.
3. Donner la définition d'une permutation et d'une involution sur E .
4. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. Donner trois différentes méthodes pour montrer que f est bijective.

Exercice 1 :

Montrer, en utilisant des tables de vérité, que :

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$.
2. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \bar{Q})$
3. $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$.
4. $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$.

Exercice 2 :

1. Soit x un irrationnel positif ($x \geq 0$ et $x \notin \mathbb{Q}$). Montrer que \sqrt{x} est irrationnel ($\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$).
2. Démontrer par un raisonnement par absurde et par contraposée la proposition suivante :
" n est un carré d'un nombre entier non nul $\Rightarrow 2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier".
3. Montrer que pour tout entier naturel n , $4^{2n+2} - 15n - 16$ est divisible par 225.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n(n^2 + 1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Exercice 3 :

1. Montrer que : $g \circ f$ est surjective et g est injective $\Rightarrow f$ est surjective
2. Montrer que : $g \circ f$ est injective et f est surjective $\Rightarrow g$ est injective.
3. Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois fonctions.
Montrer que : $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives $\Rightarrow f$, g et h sont bijectives.

Exercice 4 :

Soient :

$$f: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \frac{n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad g: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g .
2. Calculer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
3. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $g \circ f$ et $f \circ g$.