

# **OBJECTIFS ET PROGRAMME DE MECANIQUE DU SOLIDE 3è ANNEE**

L'objectif de cet enseignement est d'apporter une contribution à l'acquisition d'une culture scientifique de base permettant la compréhension des lois du mouvement et une certaine maîtrise dans le maniement des outils de la dynamique. Ces connaissances pourront permettre aux diplômés de compléter ultérieurement leur formation dans ce domaine.

Les applications directes à la spécialité du Génie Civile n'apparaissent qu'en fin de programme avec les vibrations, la sismique.

## **Calcul vectoriel et statique**

- Définition d'un vecteur et opérations élémentaires
- Notion de torseur
- Caractérisation des liaisons mécaniques
- Principe de la statique du solide et applications élémentaires

*(La statique du solide fournira des exercices d'application du calcul vectoriel. Ce chapitre devra être traité avant le début du cours de matériaux qui utilise également ces notions.)*

## **Cinématique**

- Définitions: position, vitesse, accélération d'un point matériel
- Définitions du torseur distributeur des vitesses d'un solide
- Etudes de quelques mouvements simples plan sur plan
- Notions élémentaires sur le mouvement relatif

## **Géométrie de masses**

- Définitions: centre de masse, moment d'inertie, produit d'inertie
- Exemples de calculs dans des cas simples

*(On évitera les développements mathématiques intermédiaires prématurés et on insistera sur l'aspect physique.)*

## **Cinétique**

- définitions: quantité de mouvement, énergie cinétique
- torseur cinétique du solide indéformable; définition, établissement dans des cas simples
- Théorème de énergie cinétique et applications élémentaires

## **Dynamique**

- torseur dynamique du solide indéformable; définition, établissement dans des cas simples
- Principe fondamental de la dynamique

## **Vibrations**

- Equilibrage des machines tournantes
- Vibrations à 1 degré de liberté : mise en équation - Méthodes de résolution
- Vibrations à n degrés de liberté, notion de couplage et de résonance

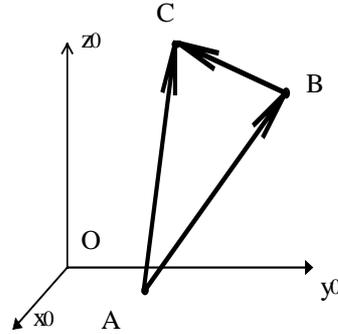
# Chap.1: RAPPELS DE CALCULS

## 1- VECTEURS

On associe à l'espace ponctuel euclidien à trois dimensions  $\mathcal{E}$ , l'espace vectoriel à trois dimensions  $E$  sur le corps des réels  $\mathbb{R}$ :

- $\mathcal{E}^3 \rightarrow E^3$
- $(A, B, C) \rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$

On associe au couple ordonné de points  $(A, B)$  de  $\mathcal{E}^2$  un élément  $\vec{AB} \in E$  définissant un vecteur libre



## 2- OPERATIONS SUR LES VECTEURS

### 21- Produit Scalaire

- $E \rightarrow \mathbb{R}$
- $(\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow \vec{X} \cdot \vec{Y} = a$

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , si  $\vec{X} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$  et  $\vec{Y} = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k}$ , alors on aura

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

#### Remarque:

- Le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un **SCALAIRE**.

#### • Propriétés:

- Commutativité:  $\vec{X} \cdot \vec{Y} = \vec{Y} \cdot \vec{X}$
- Distributivité à droite et à gauche:  $\vec{X} \cdot (\vec{Y} + \vec{Z}) = \vec{X} \cdot \vec{Y} + \vec{X} \cdot \vec{Z}$  et  $(\vec{X} + \vec{Y}) \cdot \vec{Z} = \vec{X} \cdot \vec{Z} + \vec{Y} \cdot \vec{Z}$
- Multiplication par un réel:  $\lambda(\vec{X} \cdot \vec{Y}) = (\lambda\vec{X}) \cdot \vec{Y} = \vec{X} \cdot (\lambda\vec{Y})$
- Normes:  $\|\vec{X}\| = \sqrt{\vec{X} \cdot \vec{X}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

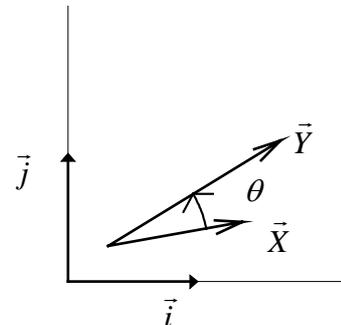
• **Calcul pratique:** si on définit l'angle  $\theta = (\vec{X}, \vec{Y})$ , alors

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \|\vec{X}\| \cdot \|\vec{Y}\| \cdot \cos \theta$$

- Calculs sur les vecteurs d'une base orthonormée directe:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$



## 22- Produit Vectoriel

- $E^2 \rightarrow E$
- $(\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow \vec{X} \wedge \vec{Y} = \vec{A}$

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , si  $\vec{X} = x_1.\vec{i} + x_2.\vec{j} + x_3.\vec{k}$  et  $\vec{Y} = y_1.\vec{i} + y_2.\vec{j} + y_3.\vec{k}$ , alors on aura

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

### • Méthode de calcul:

Calcul à effectuer: 
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Première composante: On barre la première ligne et on calcule le déterminant 2\*2 restant:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2y_3 - x_3y_2 \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & \\ & ? \\ & ? \end{vmatrix}$$

Deuxième composante: On barre la deuxième ligne et on calcule l'opposé du déterminant 2\*2 restant:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \rightarrow - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = -(x_1y_3 - x_3y_1) \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & \\ x_3y_1 - x_1y_3 & \\ & ? \end{vmatrix}$$

Troisième composante: On barre la troisième ligne et on calcule le déterminant 2\*2 restant:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (x_1y_2 - x_2y_1) \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & \\ x_3y_1 - x_1y_3 & \\ x_1y_2 - x_2y_1 & \end{vmatrix}$$

### Remarque:

• Le résultat du produit vectoriel de deux vecteurs est un **VECTEUR** perpendiculaire aux deux vecteurs.

### • Propriétés:

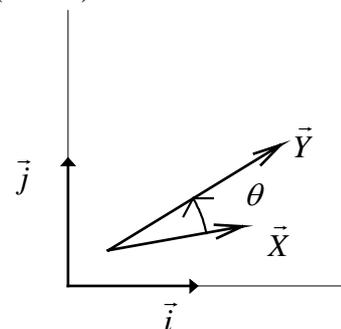
- Anticommutativité:  $\vec{X} \wedge \vec{Y} = -\vec{Y} \wedge \vec{X}$
- Distributivité à droite et à gauche:  $\vec{X} \wedge (\vec{Y} + \vec{Z}) = \vec{X} \wedge \vec{Y} + \vec{X} \wedge \vec{Z}$  et  $(\vec{X} + \vec{Y}) \wedge \vec{Z} = \vec{X} \wedge \vec{Z} + \vec{Y} \wedge \vec{Z}$
- Multiplication par un réel:  $\lambda(\vec{X} \wedge \vec{Y}) = (\lambda\vec{X}) \wedge \vec{Y} = \vec{X} \wedge (\lambda\vec{Y})$

• Calcul pratique: si on définit l'angle  $\theta = (\vec{X}, \vec{Y})$ , alors  $\vec{X} \wedge \vec{Y} = \vec{Z} = \|\vec{X}\| \cdot \|\vec{Y}\| \cdot \sin \theta \cdot \vec{k}$ , et  $(O\vec{X}, O\vec{Y}, O\vec{k})$  forme un trièdre direct, quelque soit le point O.

- Calculs sur les vecteurs d'une base orthonormée directe:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$



### 23- Produit Mixte

- $E^3 \rightarrow \mathbb{R}$
- $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) \rightarrow \vec{X} \cdot (\vec{Y} \wedge \vec{Z}) = a$

#### Remarque:

- Le résultat du produit mixte de trois vecteurs est un **SCALAIRE**.

#### • Propriétés:

- $\vec{X} \cdot (\vec{Y} \wedge \vec{Z}) = 0$  si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.
- $\vec{X} \cdot (\vec{Y} \wedge \vec{Z}) = \vec{Y} \cdot (\vec{Z} \wedge \vec{X}) = \vec{Z} \cdot (\vec{X} \wedge \vec{Y})$

### 3- NOTIONS SUR LES TORSEURS

#### 31- Définition

Un torseur est un champ de vecteurs, antisymétrique de  $E$ . Un torseur  $[\tau]_A$  en un point  $A$  est défini par:

- Un vecteur libre  $\vec{R}$  appelé **Résultante du torseur**
- Un vecteur libre  $\vec{M}_{(A)}$  appelé **Moment du torseur en A** et vérifiant:

$$\forall (A, B) \quad \vec{M}_{(B)} = \vec{M}_{(A)} + \vec{R} \wedge \vec{AB}$$

#### Remarque:

- La résultante du torseur est indépendante du point où est défini un torseur.

#### 32- Application des torseurs à la représentation d'un champ de force

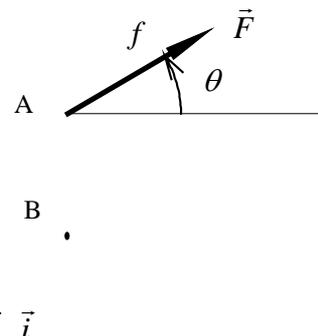
Soit un champ de force défini dans l'espace à trois dimensions de base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par la donnée de la force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $A(2,3,0)$ :

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \cdot \cos \theta \vec{i} + \|\vec{F}\| \cdot \sin \theta \vec{j} \quad \text{ou} \quad \vec{F}(f \cos \theta, f \sin \theta, 0)$$

Le moment de la force  $\vec{F}$  en son point d'application  $A$  est nul d'où:  $\vec{M}_{F(A)} = \vec{0}$ . Si on veut calculer le moment de la force  $\vec{F}$  au point  $B(2,1,0)$ , on obtient  $\vec{M}_{F(B)} = -2f \cos \theta \cdot \vec{k}$  (intensité de la force  $f$  multiplié par le bras de levier  $2 \cdot \cos \theta$ , sens négatif).

En appliquant la notion de torseur, on peut définir le torseur force  $[F]_A$  au point  $A$ , associé à  $\vec{F}$  par:

- la résultante du torseur force  $[F]_A$  égale à la force  $\vec{F}$
- le moment en  $A$  du torseur force  $[F]_A$  égal à  $\vec{M}_{F(A)} = \vec{0}$



Le moment au point  $B$  est défini par la formule de transport donnée plus haut soit:

$$\vec{M}_{F(B)} = \vec{M}_{F(A)} + \vec{F} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} 0 & f \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & f \sin \theta & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2f \cos \theta \end{vmatrix}$$

ou:

$$\vec{M}_{F(B)} = -2f \cos \theta \cdot \vec{k}$$

#### Remarques:

- La notion de torseur de force permet donc de parler globalement d'une force et de son moment en tous points de l'espace.
- Les deux vecteurs définis dans un torseur sont de natures différentes. Pour un torseur de force, le vecteur résultant est une force ayant des composantes dont les unités sont des (N), alors que le moment en un point est un moment dont les composantes ont des unités en (N.m).
- Attention quand l'on demande de **définir un torseur**, il est nécessaire de **donner une réponse pour la résultante et une réponse pour le moment**.

## 4- CHANGEMENTS DE BASES

Soient deux bases orthonormées directes  $b_0(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et  $b_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  et telles que  $\vec{k}_0 = \vec{k}_1$

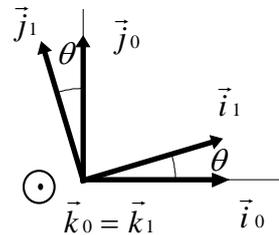
### 41- Projection des vecteurs de bases

Si on exprime les vecteurs de la base  $b_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  dans  $b_0(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ , on obtient:

$$\begin{cases} \bullet \vec{i}_1 = \cos \theta \cdot \vec{i}_0 + \sin \theta \cdot \vec{j}_0 \\ \bullet \vec{j}_1 = -\sin \theta \cdot \vec{i}_0 + \cos \theta \cdot \vec{j}_0 \\ \bullet \vec{k}_1 = \vec{k}_0 \end{cases}$$

Inversement, si on exprime les vecteurs de la base  $b_0(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  dans  $b_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ , on obtient:

$$\begin{cases} \bullet \vec{i}_0 = \cos \theta \cdot \vec{i}_1 - \sin \theta \cdot \vec{j}_1 \\ \bullet \vec{j}_0 = \sin \theta \cdot \vec{i}_1 + \cos \theta \cdot \vec{j}_1 \\ \bullet \vec{k}_0 = \vec{k}_1 \end{cases}$$



### 42- Changements de bases d'un vecteur quelconque

Soit  $\vec{U}(a, b, c)_{b_1}$  un vecteur exprimé dans la base  $b_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . L'expression de  $\vec{U}$  dans la base  $b_0(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  sera:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= a \cdot \vec{i}_1 + b \cdot \vec{j}_1 + c \cdot \vec{k}_1 = a \cdot (\cos \theta \cdot \vec{i}_0 + \sin \theta \cdot \vec{j}_0) + b \cdot (-\sin \theta \cdot \vec{i}_0 + \cos \theta \cdot \vec{j}_0) + c \cdot \vec{k}_0 \\ &= (a \cdot \cos \theta - b \cdot \sin \theta) \cdot \vec{i}_0 + (a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \theta) \cdot \vec{j}_0 + c \cdot \vec{k}_0 \end{aligned}$$

d'où:

$$\vec{U}(a.\cos\theta - b.\sin\theta, a.\sin\theta + b.\cos\theta, c)_{b_0}$$

### **5- RELATIONS DE TRIGONOMETRIE**

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$
- $\sin(\pi + \theta) = \sin\theta$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

# Chap. 2: STATIQUE

## 1- SOLIDES ET SYSTEMES MATERIELS

**Système matériel:** Ensemble de matière dont les atomes peuvent être de même nature ou non, déformable ou non, compressible ou incompressible.

**Solide:** Ensemble de matière dont les atomes sont de même nature, géométriquement parfait, indéformable et homogène.

## 2- ACTIONS MECANIQUES

Relatives au solide réel.

### 21- Actions mécaniques à distance

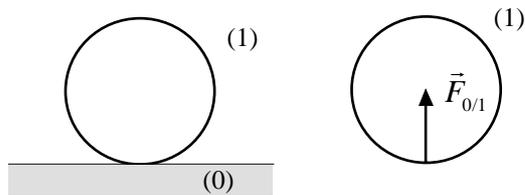
- Poids ou pesanteur
- Aimantation

### 22- Actions mécaniques de contact

#### 221- Charge concentrée

ex: Bille sur un plan.

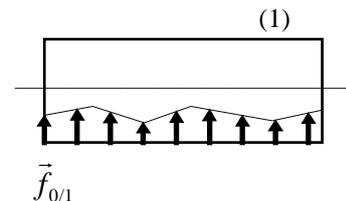
L'action du plan sur la bille peut être représentée par une force  $\vec{F}_{0/1}$



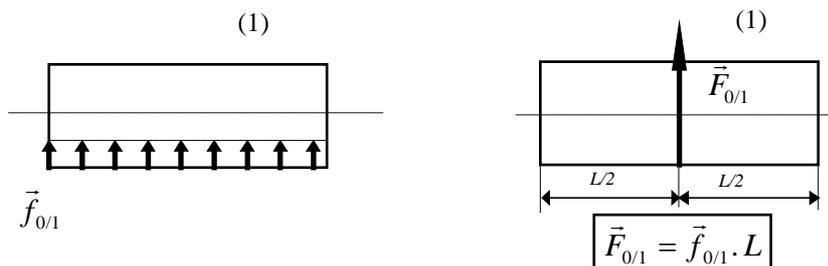
#### 222- Charge linéaire

ex: cylindre sur un plan.

L'action du plan sur le cylindre peut être représentée par une force linéique (force répartie le long d'une ligne)  $\vec{f}_{0/1}$  ( $N.m^{-1}$ ).



**Si la charge est uniforme**, alors l'ensemble de la charge linéique est équivalente à une force  $\vec{F}_{0/1}$  située au centre de la ligne de contact

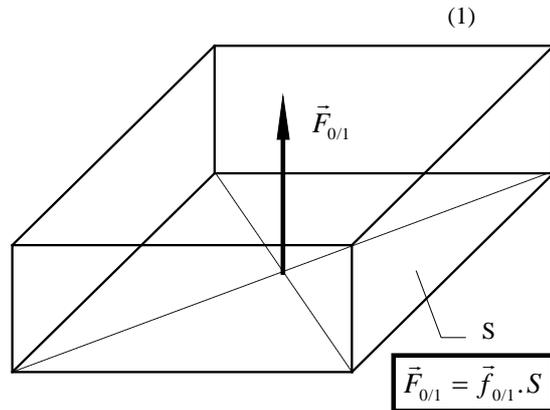
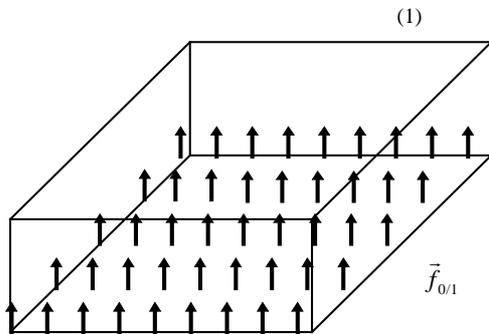


## 223- Charge surfacique

ex: Boite sur un plan.

L'action du plan sur la boite peut être représentée par une force surfacique (force répartie sur une surface, équivalente à une pression)  $\vec{f}_{0/1}$  ( $N.m^{-2}$ ).

Si la charge est uniforme, alors l'ensemble de la charge surfacique est équivalente à une force  $\vec{F}_{0/1}$  située au centre de la surface de contact.



## 23- Actions mécaniques exercées sur des liaisons usuelles parfaites

Une liaison parfaite est une liaison sans frottement.

L'ensemble des actions mécaniques qui s'exercent à l'intérieur d'une liaison peut être représenté par un torseur résultant exprimé au centre de la liaison. Les torseurs associés aux actions mécaniques des liaisons courantes sont données en pages suivantes.

## 3- PRINCIPE DE LA STATIQUE

Le principe de la statique est une application particulière du principe fondamental de la dynamique que nous aborderons dans le chapitre sur la dynamique.

### 31- Enoncé

Un solide indéformable en équilibre sous l'action de n actions extérieures reste en équilibre si la somme des torseurs associés à ces actions est égale au torseur nul, soit

$$\bullet \sum_{i=1}^{i=n} \vec{R}_i = \vec{0}$$

$$\bullet \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_{i(O)} = \vec{0}, \forall O$$

#### **Remarque:**

• La projection de ces deux relations vectorielles permet d'obtenir six équations dans l'espace et trois équations dans un plan.

| Nom de la liaison               | Symbolisation | Torseur des actions du solide 2 sur le solide 1                     |  |
|---------------------------------|---------------|---|--|
|                                 |               | Résultante  | Moment en O  |
| Liaison encastrement            |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{cases}$ | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} L_{21} \\ M_{21} \\ N_{21} \end{cases}$ |
| Liaison pivot d'axe Ox          |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{cases}$ | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} 0 \\ M_{21} \\ N_{21} \end{cases}$      |
| Liaison glissière d'axe Ox      |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} 0 \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{cases}$      | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} L_{21} \\ M_{21} \\ N_{21} \end{cases}$ |
| Liaison pivot glissant d'axe Ox |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} 0 \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{cases}$      | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} 0 \\ M_{21} \\ N_{21} \end{cases}$      |
| Liaison sphérique               |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{cases}$ | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$                |

| Nom de la liaison                             | Symbolisation | Torseur des actions du solide 2 sur le solide 1                     |   |
|---|---------------|---|---|
|   |               | Résultante  | Moment en O   |
| Appui plan sur plan (O,x,y)                   |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ Z_{21} \end{cases}$           | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} L_{21} \\ M_{21} \\ 0 \end{cases}$                                   |
| Linéaire rectiligne d'axe Ox sur plan (O,x,y) |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ Z_{21} \end{cases}$           | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} 0 \\ M_{21} \\ 0 \end{cases}$  |
| Linéaire annulaire d'axe Ox                   |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} 0 \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{cases}$      | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$   |
| Liaison ponctuelle sur plan (O,y,z)           |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} X_{21} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$           | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$   |
| Liaison glissière hélicoïdale d'axe Ox        |               | $\vec{R}_{21} \begin{cases} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{cases}$ | $\vec{M}_{21}(O) \begin{cases} L_{21} \\ M_{21} \\ N_{21} \end{cases}$<br>$L_{21} = a \cdot X_{21}$ |

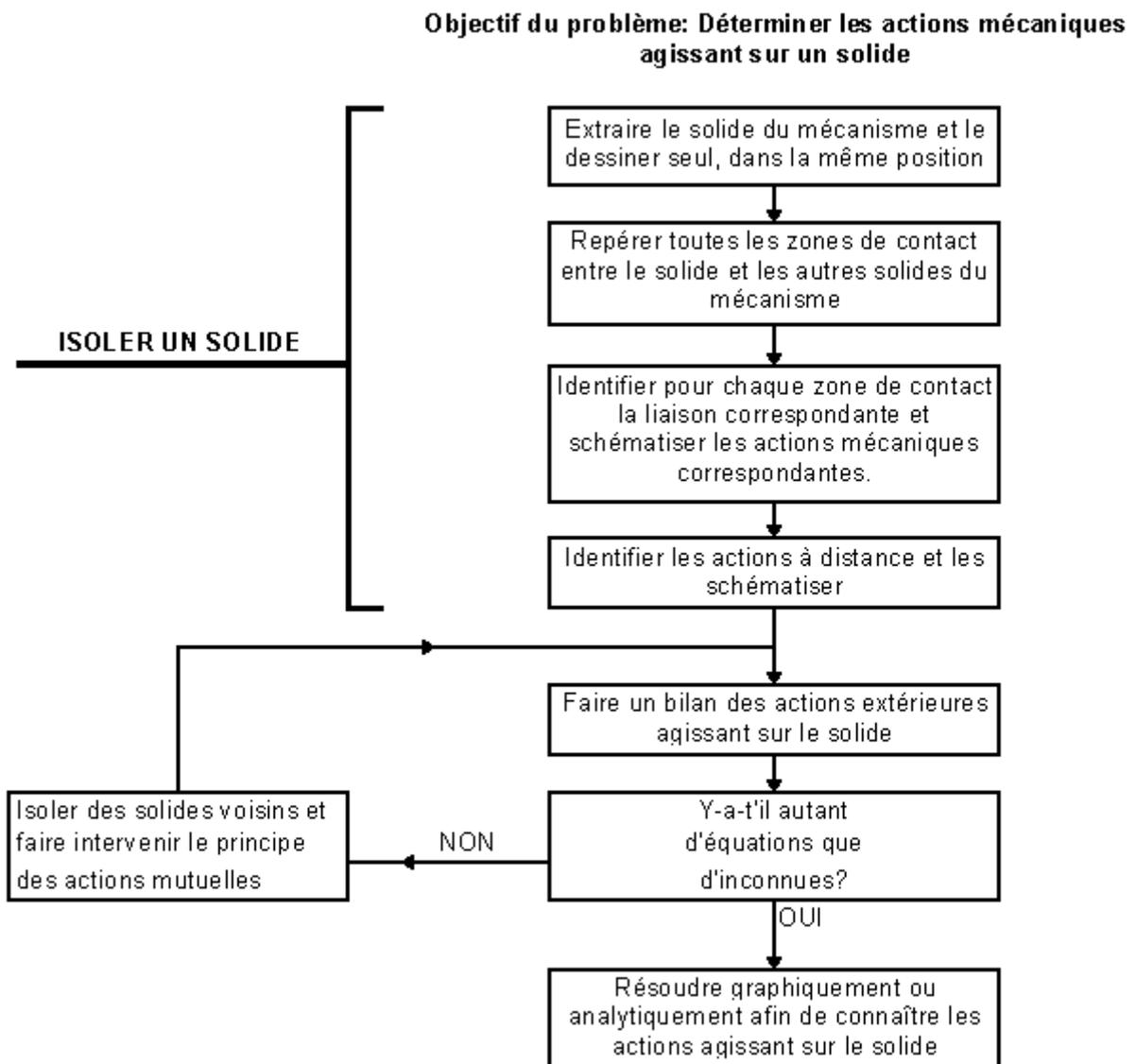
### 32- Principe des actions mutuelles

Pour deux solides (0) et (1) en contact, l'action exercée par le solide (1) sur le solide (0) est opposée à l'action exercée par le solide (0) sur le solide (1):

$$[A]_{0/1} = -[A]_{1/0}$$

## 4- METHODES DE RESOLUTION

### 41- Organigramme de la méthode



## 42- Cas Particuliers

### 421- Solides soumis à deux forces extérieures

Soit un solide (0) soumis à deux forces extérieures  $\vec{F}_{1/0}$  et  $\vec{F}_{2/0}$ . Soit P le point d'application de la force  $\vec{F}_{1/0}$ . D'après le principe de la statique, l'équilibre du solide (0) se traduit par:

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \vec{F}_{1/0} + \vec{F}_{2/0} = \vec{0} \\ \bullet \vec{M}_{\vec{F}_{1/0}}(P) + \vec{M}_{\vec{F}_{2/0}}(P) = \vec{0} \end{array} \right.$$

d'où:  $\vec{M}_{\vec{F}_{2/0}}(P) = \vec{0}$

**Théorème:** Si un solide est en équilibre sous l'action de deux forces extérieures, alors ces deux forces sont égales et opposées. Leur direction passe par les deux points d'application des forces.

### 422- Solides soumis à trois forces extérieures non parallèles

Soit un solide (0) soumis à trois forces extérieures  $\vec{F}_{1/0}$ ,  $\vec{F}_{2/0}$  et  $\vec{F}_{3/0}$ . On suppose parfaitement connues la force  $\vec{F}_{1/0}$  ainsi que la direction de  $\vec{F}_{2/0}$ . Soit I le point d'intersection des directions des forces  $\vec{F}_{1/0}$  et  $\vec{F}_{2/0}$ . D'après le principe de la statique, l'équilibre du solide (0) se traduit par:

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \vec{F}_{1/0} + \vec{F}_{2/0} + \vec{F}_{3/0} = \vec{0} \\ \bullet \vec{M}_{\vec{F}_{1/0}}(I) + \vec{M}_{\vec{F}_{2/0}}(I) + \vec{M}_{\vec{F}_{3/0}}(I) = \vec{0} \end{array} \right.$$

d'où:  $\vec{M}_{\vec{F}_{3/0}}(I) = \vec{0}$ .

Le point I appartient donc aussi à la direction de  $\vec{F}_{3/0}$

**Théorème:** Un solide soumis à l'action de trois forces extérieures non parallèles est en équilibre, si:

- La somme des trois forces est nulle
- Les trois forces sont concourantes en un point.

### 423- Solides soumis à l'action d'au moins quatre forces extérieures

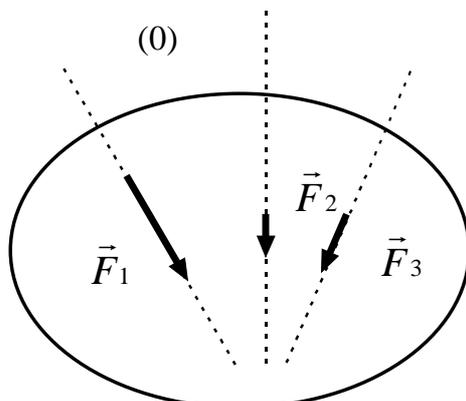
- Cas des forces non coplanaires: Résolution analytique
- Cas des forces coplanaires: Résolution graphique ou analytique

## 5- STATIQUE GRAPHIQUE

La statique graphique est une méthode de résolution rapide et sans calcul pour les cas plans.

### 51- Détermination graphique de la résultante d'un système de forces.

Exemple sur un système de trois forces.



On recherche la résultante des trois forces qui doit vérifier en tous points O de l'espace:

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ \bullet \vec{M}_{\vec{R}}(O) = \vec{M}_{\vec{F}_1}(O) + \vec{M}_{\vec{F}_2}(O) + \vec{M}_{\vec{F}_3}(O) \end{array} \right.$$

Pour trouver graphiquement la résultante de ces trois forces, on doit tracer un **dynamique** et un **funiculaire**.

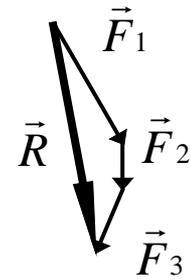
**Tracé du dynamique:**

Le dynamique permet d'obtenir le tracé de la résultante des trois forces. Il vérifie l'équation:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

On connaît alors parfaitement l'intensité et la direction de cette résultante, mais on ignore où cette résultant agit sur le solide (0).

Pour tracer le dynamique, il suffit de mettre bout à bout toutes les forces. On obtient la résultante des forces en partant de l'origine de la première force et en arrivant sur l'extrémité de la dernière .

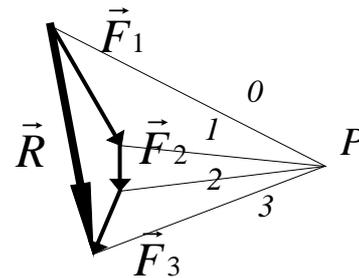


**Tracé du funiculaire:**

Le funiculaire permet d'obtenir la position de la résultante des trois forces. Il vérifie l'équation:

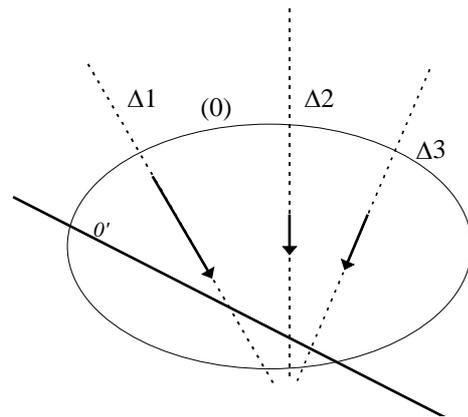
$$\vec{M}_{R(O)} = \vec{M}_{F_1(O)} + \vec{M}_{F_2(O)} + \vec{M}_{F_3(O)}$$

Pour tracer le funiculaire, on commence par tracer sur le dynamique, les **rayons polaires**. On choisit un point quelconque P appelé pôle et on relie ce point aux extrémités des différents vecteurs. Chaque segment ainsi tracé est un rayon polaire. On les repère par un chiffre.

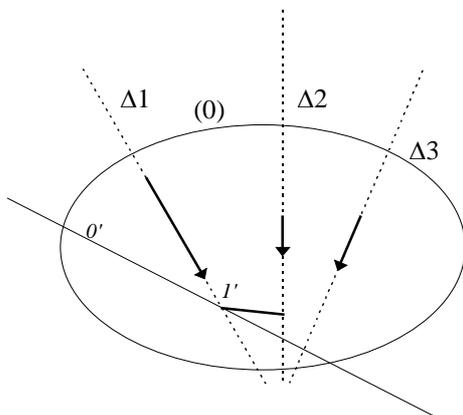


Le funiculaire est ensuite tracé sur le schéma du solide.

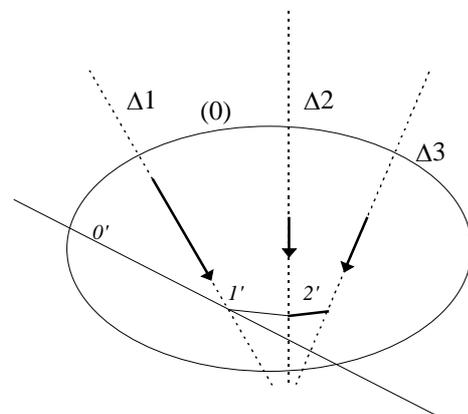
- On trace une parallèle 0' au rayon polaire 0.

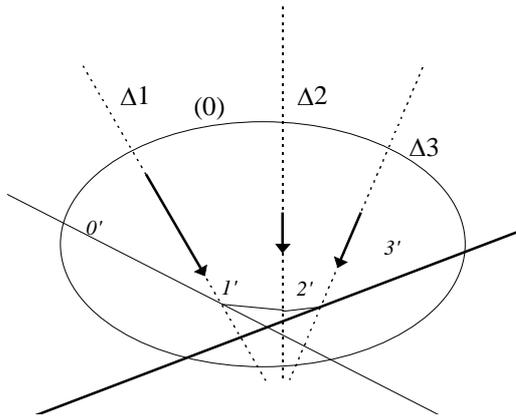


- A l'intersection de 0' et de la direction Δ1 de  $\vec{F}_1$ , on trace une parallèle 1' au rayon polaire 1 jusqu'à l'intersection avec la direction Δ2 de  $\vec{F}_2$ .



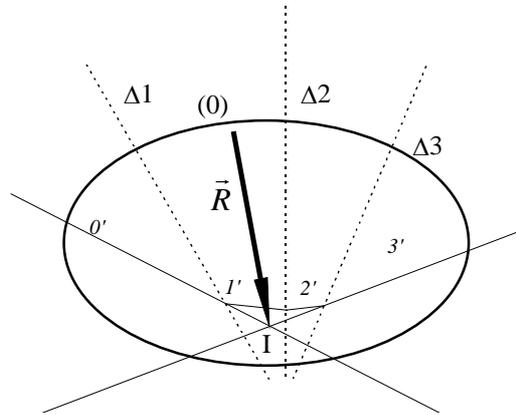
- A l'intersection de 1' et de la direction Δ2 de  $\vec{F}_2$ , on trace une parallèle 2' au rayon polaire 2 jusqu'à l'intersection avec la direction Δ3 de  $\vec{F}_3$ .





- A l'intersection de 2' et de la direction  $\Delta 3$  de  $\vec{F}_3$  on trace une parallèle 3' au rayon polaire 3.

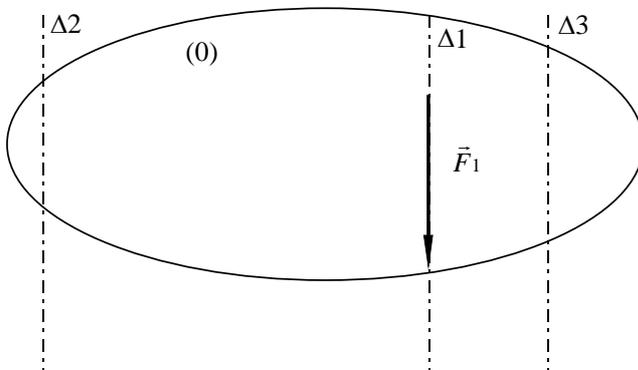
• L'intersection I des droites 0' et 3' est un point de la droite d'action de la résultante  $\vec{R}$ .



## 52- Equilibre d'un système matériel

### 521- Equilibre d'un système matériel soumis à des forces parallèles

Soit un système matériel **en équilibre** soumis à trois forces parallèles  $\vec{F}_1$  connue,  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$  inconnues.



Le système étant en équilibre, les équations suivantes sont vérifiées en tous points O de l'espace:

- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$
- $\vec{M}_{\vec{F}_1(O)} + \vec{M}_{\vec{F}_2(O)} + \vec{M}_{\vec{F}_3(O)} = \vec{0}$

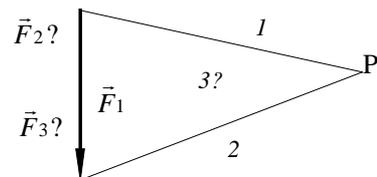
Pour trouver graphiquement la solution de ce problème, on doit tracer un dynamique et un funiculaire.

#### Tracé du dynamique:

Le dynamique vérifie l'équation:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Pour tracer le dynamique, il suffit de tracer la force  $\vec{F}_1$  on voudrait tracer la force  $\vec{F}_3$  au bout de  $\vec{F}_1$ , puis  $\vec{F}_2$  au bout de  $\vec{F}_3$ . Le système étant à l'équilibre, la résultante des trois forces est nulle et donc l'extrémité de  $\vec{F}_2$  correspond à l'origine de  $\vec{F}_1$ .

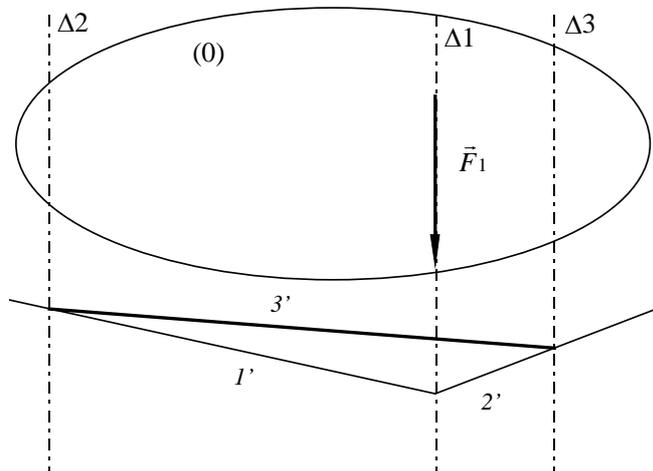


On dit alors que le **dynamique est fermé**. Le problème qui se pose est que l'on ne connaît pas les intensités de  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$ .

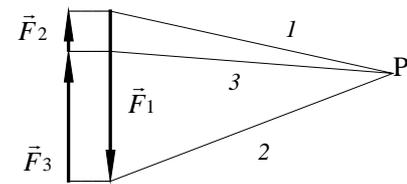
**Tracé du funiculaire:**

Le funiculaire permet d'obtenir l'orientation du segment 3' et donc de déterminer le rayon polaire 3, correspondant au point de passage de  $\vec{F}_2$  à  $\vec{F}_3$ . On peut alors en déduire sur le dynamique les intensités de  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$ .

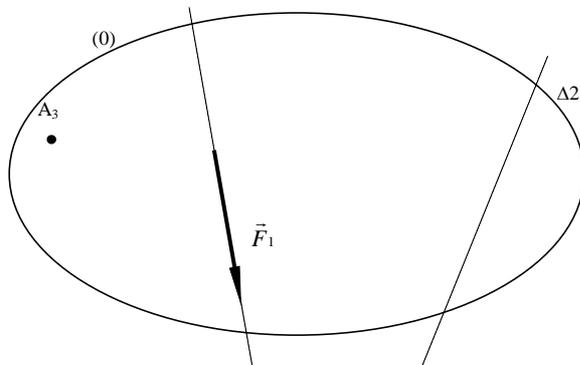
- Le rayon polaire 2 se trouve entre  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_3$ , on trace donc le segment 2' entre les directions  $\Delta 1$  et  $\Delta 3$ . Le rayon polaire 1 se trouve entre  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , on trace donc le segment 1' entre les directions  $\Delta 1$  et  $\Delta 2$ . Le segment 3', appelé **ligne de fermeture** est obtenu en reliant le point d'intersection de 1' et  $\Delta 2$ , avec le point d'intersection de 2' et  $\Delta 3$ .



- On reporte alors sur le dynamique, le rayon polaire 3, parallèle à 3' au point P. On obtient le point correspondant à la limite des vecteurs  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$ .



**522- Equilibre d'un système matériel soumis à des forces concourantes**



Soit un système matériel en équilibre soumis à trois forces concourantes  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$ . Les inconnues sont l'intensité de  $\vec{F}_2$ , l'intensité et la direction de  $\vec{F}_3$ . On connaît  $A_3$ , le point d'application de  $\vec{F}_3$ .

Le système étant en équilibre, les équations suivantes sont vérifiées en tous points O de l'espace:

- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$
- $\vec{M}_{\vec{F}_1(O)} + \vec{M}_{\vec{F}_2(O)} + \vec{M}_{\vec{F}_3(O)} = \vec{0}$

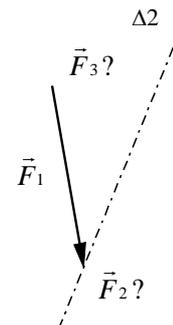
De même que dans les paragraphes précédents, on doit tracer un dynamique et un funiculaire.

**Tracé du dynamique:**

Le dynamique vérifie l'équation:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

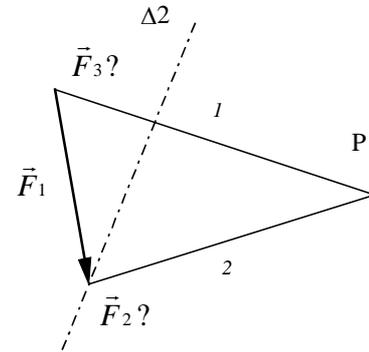
Pour tracer le dynamique, il suffit de tracer la force  $\vec{F}_1$ . On devrait tracer la force  $\vec{F}_2$  au bout de  $\vec{F}_1$ , puis  $\vec{F}_3$  au bout de  $\vec{F}_2$ . Le système étant à l'équilibre, la résultante des trois forces est nulle et donc l'extrémité de  $\vec{F}_3$  correspond à l'origine de  $\vec{F}_1$ . Le dynamique est fermé.



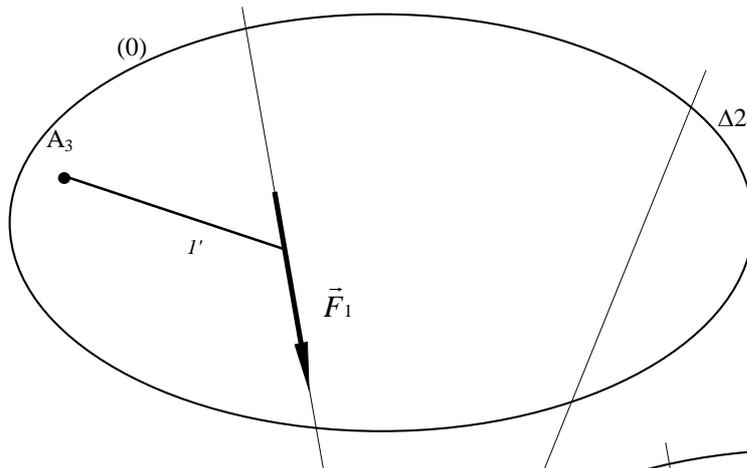
Le problème qui se pose est que l'on ne connaît pas les intensités de  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$ . La direction de  $\vec{F}_2$  étant connue, il reste à déterminer le point correspondant à l'extrémité de  $\vec{F}_2$  et donc à l'origine de  $\vec{F}_3$ .

**Tracé du funiculaire:**

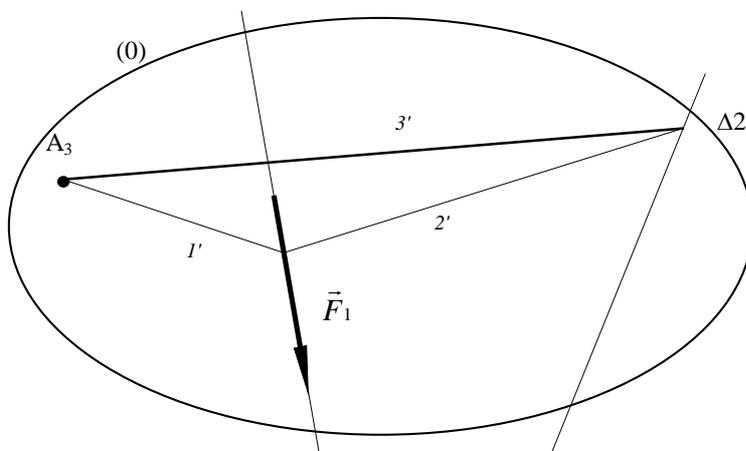
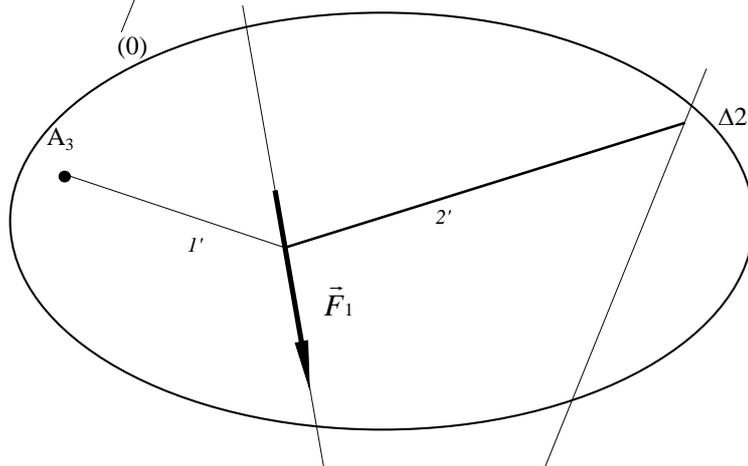
Le funiculaire permet d'obtenir l'orientation du segment 3' et donc de déterminer le rayon polaire 3. On peut alors en déduire sur le dynamique les intensités de  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$ .



- Le rayon polaire 1 se trouve entre  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_3$ , on trace donc le segment 1' entre les directions  $\Delta 1$  et  $\Delta 3$ . La direction  $\Delta 3$  est inconnue mais on connaît un point de cette direction: le point d'application  $A_3$  de  $\vec{F}_3$ .

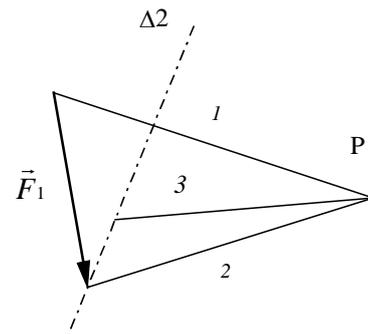


- Le rayon polaire 2 se trouve entre  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , on trace donc le segment 2' entre les directions  $\Delta 1$  et  $\Delta 2$ .

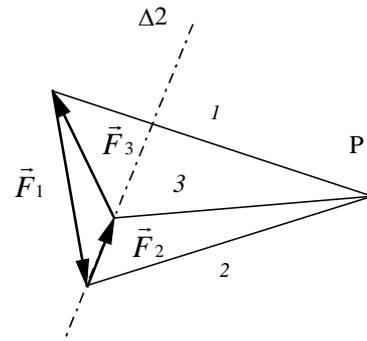


- Le segment 3', ligne de fermeture, est obtenu en reliant le point  $A_3$  au point d'intersection de 2' et  $\Delta 2$ .

- On reporte alors sur le dynamique, le rayon polaire 3, parallèle à 3' au point P. On obtient le point correspondant à la limite des vecteurs  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$ .

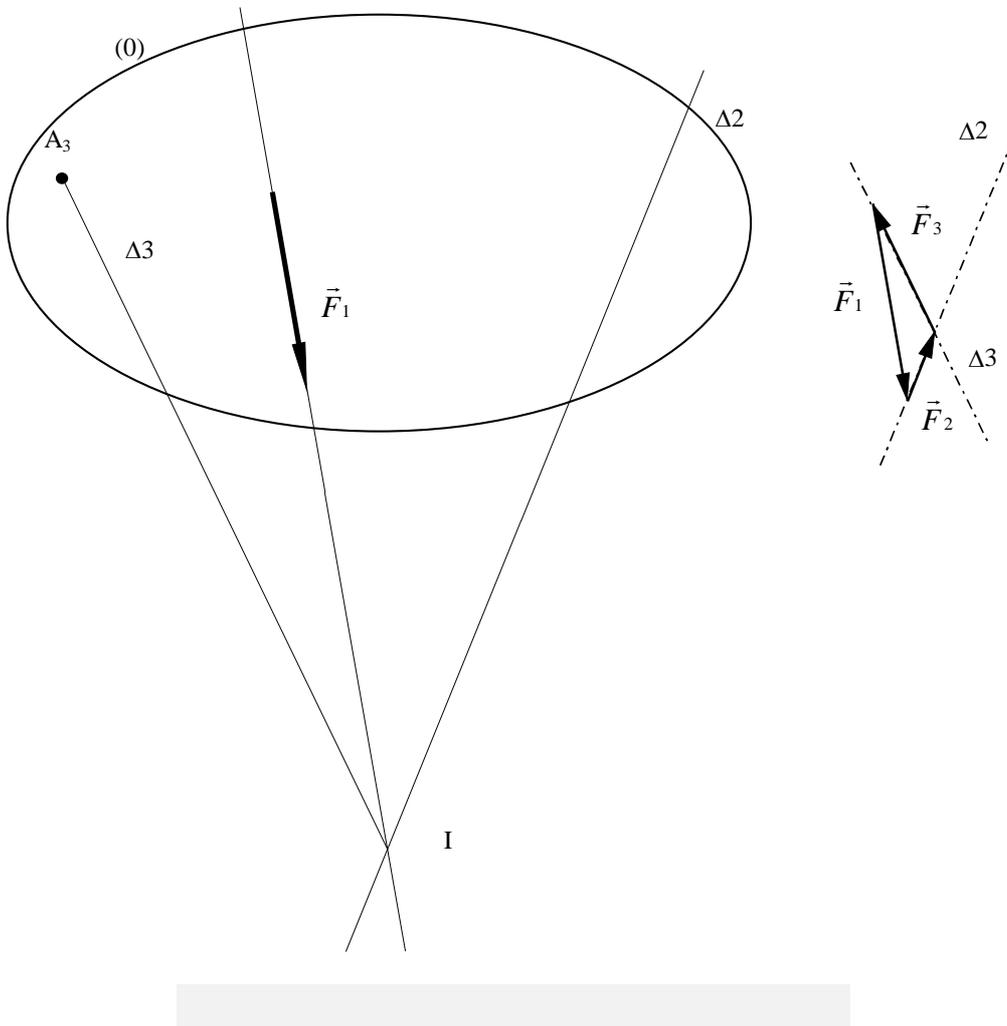


- On peut alors tracer les deux forces  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$ .



**Remarque:**

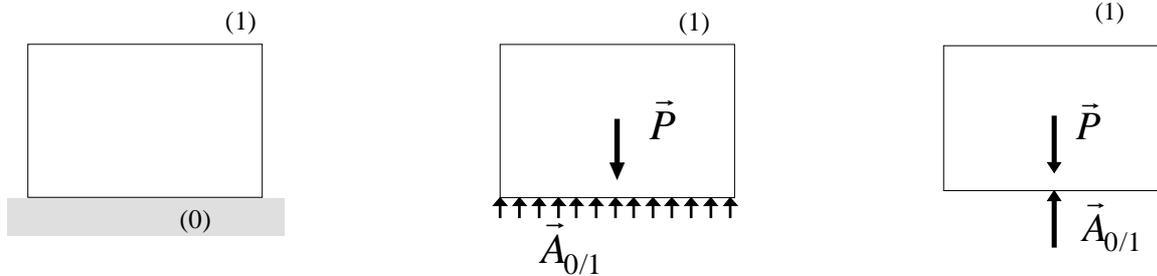
- On peut également résoudre ce problème en utilisant le théorème d'un solide soumis à trois forces non parallèles, concourantes en un point. On obtient alors la direction de  $\vec{F}_3$  qu'il suffit de reporter à l'origine de  $\vec{F}_1$  pour trouver le point recherché. Cette méthode n'est utilisable que lorsque le point I de concourance est accessible.



## CHAP.3: ADHERENCE - FROTTEMENT

### 1- CONSTATATIONS

- Soit une caisse posée sur le sol, en équilibre. L'action du sol (0) sur la caisse (1) peut être modélisée par une action surfacique ou par l'action ponctuelle équivalente.



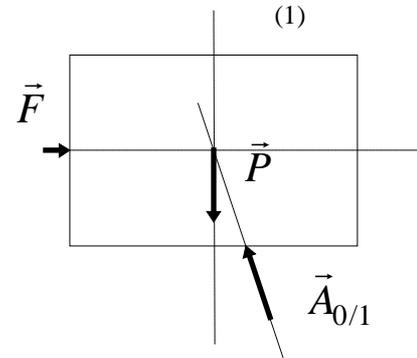
- On exerce une force horizontale sur la caisse: **elle reste immobile**. L'équilibre est impossible avec l'action  $\vec{A}_{0/1}$  verticale obtenue précédemment. L'action du sol sur la caisse s'incline et se déplace vers la droite. (La caisse, en équilibre, est soumise à trois forces extérieures: elles sont concourantes).

- Si l'on augmente la valeur de la force de poussée  $\vec{F}$ , l'action du sol s'incline de plus en plus et son point d'application se déplace de plus en plus vers la droite. Tant qu'il n'y a pas de mouvement, on dit qu'il y a **adhérence**.

- Pour une valeur de  $\vec{F}$  supérieure à  $\vec{F}_a$ , la caisse commence à glisser sur le sol: l'équilibre est rompu. Il n'y a plus d'adhérence, il y a **frottement de glissement**.

- Si l'on diminue la valeur de  $\vec{F}$ , la caisse continue à glisser.

- Pour une valeur de  $\vec{F}$  inférieure à  $\vec{F}_g$ , la caisse s'arrête, un nouvel état d'équilibre apparaît. Il faudra que  $\vec{F}$  devienne supérieure à  $\vec{F}_a$  pour obtenir un nouveau mouvement.



### 2- COEFFICIENTS ET ANGLES DE FROTTEMENT

#### 21- Définitions

On définit:

- Le coefficient de frottement d'adhérence:  $f_a = \frac{F_a}{P}$
- Le coefficient de frottement de glissement:  $f_g = \frac{F_g}{P}$
- L'angle de frottement d'adhérence:  $\varphi_a = \text{Arctg}(f_a)$
- L'angle de frottement de glissement:  $\varphi_g = \text{Arctg}(f_g)$

#### **Remarques:**

- $f_a$  et  $f_g$  dépendent de la nature des matériaux et des états de surface. Ils ne dépendent pas des efforts appliqués.
- Dans la pratique on prendra  $f_a = f_g$

## 22- Exemples de valeurs des coefficients de frottement

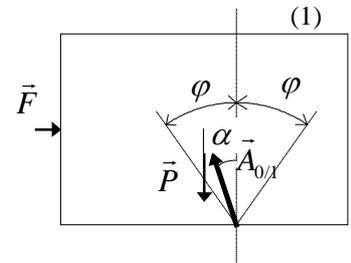
| Nature des matériaux en contact | fa        |          | fg        |             |
|---------------------------------|-----------|----------|-----------|-------------|
|                                 | à sec     | lubrifié | à sec     | lubrifié    |
| acier sur acier                 | 0.18      | 0.12     | 0.1       | 0.09        |
| acier sur fonte                 | 0.19      | 0.1      | 0.16      | 0.04 à 0.08 |
| acier sur bronze                | 0.11      | 0.1      | 0.1       | 0.09        |
| acier sur Téflon                | 0.04      |          | 0.04      |             |
| bronze sur fonte                |           | 0.1      | 0.2       | 0.04 à 0.08 |
| acier sur Nylon                 |           |          | 0.35      | 0.12        |
| bois sur bois                   | 0.65      | 0.2      | 0.2 à 0.4 | 0.04 à 0.16 |
| métal sur bois                  | 0.5 à 0.6 | 0.1      | 0.2 à 0.5 | 0.02 à 0.08 |
| métal sur glace                 |           |          | 0.02      |             |
| pneu sur route                  | 0.8       |          | 0.6       | 0.1 à 0.3   |

### 3- LOIS DU FROTTEMENT - LOIS DE COULOMB

#### • Cas de l'adhérence:

$$\alpha < \varphi$$

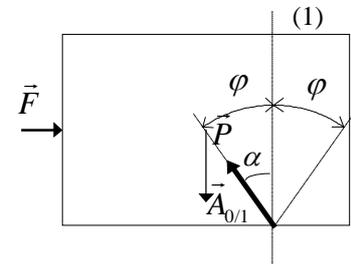
L'action résultante s'oppose au mouvement de glissement éventuel.



#### • Cas de l'équilibre strict:

$$\alpha = \varphi$$

C'est la position limite entre l'adhérence et le glissement

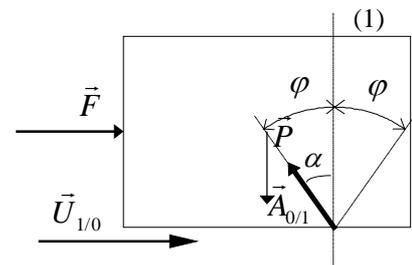


#### • Cas du glissement:

$$\alpha = \varphi$$

$\vec{A}_{0/1}$  est toujours sur le cône de glissement

$\vec{A}_{0/1}$  s'oppose à la vitesse de glissement du solide (1) par rapport au solide (0) appelée vitesse de glissement  $\vec{U}_{1/0}$



#### 4- EFFORT NORMAL - EFFORT TANGENTIEL

$\vec{A}_{0/1}$  peut être décomposée en:

- une **action normale** à la surface de contact  $\vec{N}_{0/1}$
- une **action tangentielle** à la surface de contact  $\vec{T}_{0/1}$

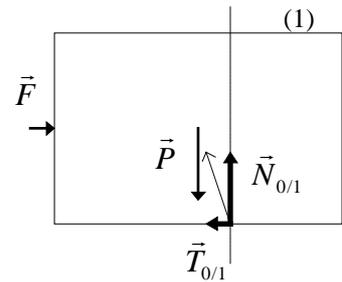
On a:

- dans le cas de l'**adhérence**:

$$\|\vec{T}_{0/1}\| < f \cdot \|\vec{N}_{0/1}\|$$

- dans le cas de l'**équilibre strict** ou du **glissement**:

$$\|\vec{T}_{0/1}\| = f \cdot \|\vec{N}_{0/1}\|$$



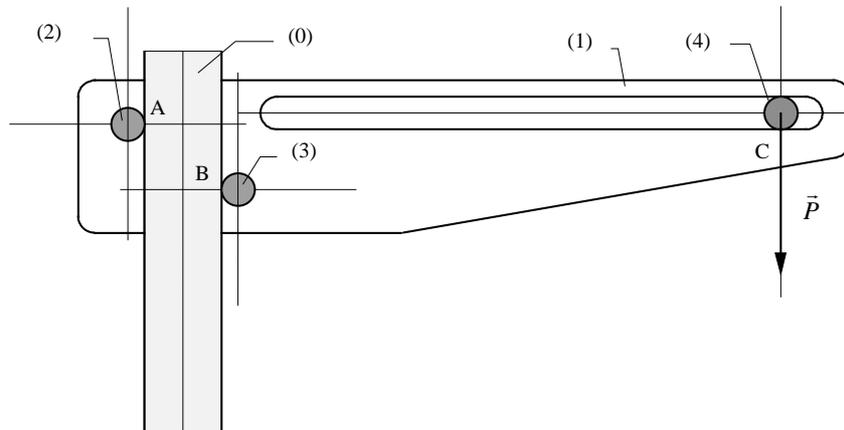
#### **Remarque:**

- $\vec{T}_{0/1}$  est toujours opposé au mouvement éventuel ou réel.

#### 5- APPLICATION DE L'ADHERENCE AU PHENOMENE D'ARC-BOUTEMENT

On dit qu'il y a arc-boutement sur un solide lorsque le phénomène d'adhérence provoque une impossibilité de mouvement quelque soit l'intensité des actions mécaniques extérieures. Il y a équilibre quelques soient les intensités des efforts.

**Exemple:** Ce dispositif est constitué d'une plaque (1) sur laquelle sont fixées deux piges (2) et (3). Un crochet articulé sur l'axe (4) supporte une charge  $\vec{P}$ . Cet axe peut se déplacer le long de la rainure percée dans (1). Le solide (1+2+3) est en contact aux points A et B avec une tige (0).



Supposons que le solide (1+2+3) soit en équilibre sous l'action des solides (0) et (4). On supposera que les poids propres des solides sont négligeables devant les autres efforts. On connaît les coefficients de frottement en A et B:  $f_A = f_B = 0,18$

#### **Bilan des actions extérieures exercées sur le solide (P)=(1+2+3):**

- Action de l'axe (4) en C:

$$[C_{4P}]_C \Rightarrow \vec{C}_{4P} = \vec{P} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{\vec{C}_{4P}(C)} = \vec{0}$$

- Action de la tige (0) en A avec frottement:

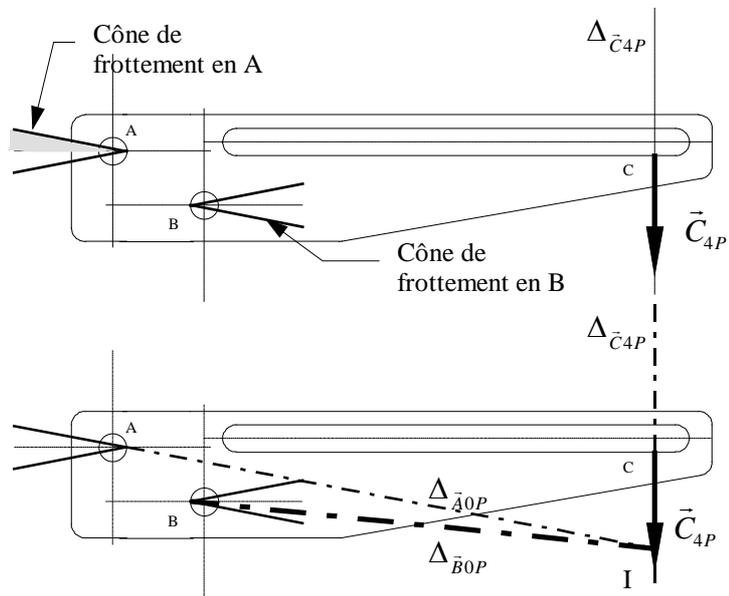
$$[A_{0P}]_A \Rightarrow \vec{A}_{0P} \text{ inconnue} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{\vec{A}_{0P}(A)} = \vec{0}$$

- Action de la tige (0) en B avec frottement:

$$[B_{0P}]_B \Rightarrow \vec{B}_{0P} \text{ inconnue et } \vec{M}_{\vec{B}_{0P}(B)} = \vec{0}$$

On dispose ici de quatre inconnues, modules et directions de  $\vec{A}_{0P}$  et  $\vec{B}_{0P}$  et de trois équations (le système est plan); le système est hyperstatique de degré 1. Toutefois nous allons pouvoir malgré tout analyser son comportement.

Connaissant les coefficients de frottement en A et B, nous connaissons les angles de frottement en A et B. Les actions  $\vec{A}_{0P}$  et  $\vec{B}_{0P}$  sont toujours contenues dans les cônes de frottement. De plus, nous savons que les actions en A et B s'opposent à un éventuel mouvement. On peut donc en déduire que l'action en A se situera dans la zone grisée sur le schéma ci contre.



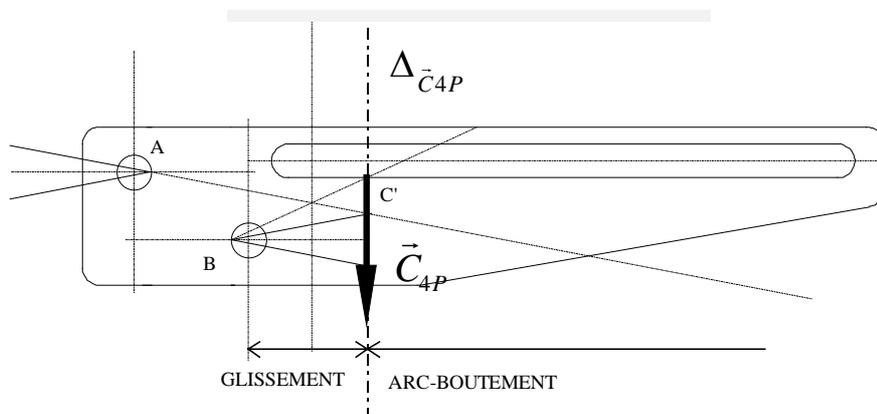
Supposons maintenant que l'action en A se situe sur le cône de frottement, c'est à dire qu'au point A nous nous plaçons à la limite entre l'équilibre et le mouvement. On peut alors déterminer la direction de l'action en B; en effet le solide (P) est soumis à trois forces, elles sont donc concourantes en un point I. On recherche le point de concourance de  $\Delta_{\vec{A}_{0P}}$  et de  $\Delta_{\vec{C}_{4P}}$ , on en déduit le point I et donc la direction  $\Delta_{\vec{B}_{0P}}$ .

On constate que la direction de B est contenue dans le cône de frottement en B: le solide (P) est donc en équilibre. De plus cet équilibre est indépendant de la valeur de la force  $\vec{C}_{4P} = \vec{P}$ , c'est le phénomène de l'arc-boutement.

**Remarques:**

- En réalité l'action en A se situe plus bas, autrement l'action en B ne s'opposerait pas au mouvement éventuel vers le bas.
- On ne sait pas trouver exactement les positions de  $\vec{A}_{0P}$  et  $\vec{B}_{0P}$

Si l'on déplace la charge vers la gauche, On obtiendra l'équilibre strict pour la charge passant par le point C' et un mouvement de glissement pour toutes charges situées à gauche de C' (équilibre impossible, il faudrait que l'action en B sorte du cône de frottement ce qui est irréalisable.)



## CHAP. 4: CINEMATIQUE

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps par rapport au temps, indépendamment de leurs causes.

### 1- POSITIONNEMENT D'UN POINT OU D'UN SOLIDE

#### 11- Position d'un point

- **Dans le plan:** 2 paramètres  
coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ :

$$O\vec{P} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ :

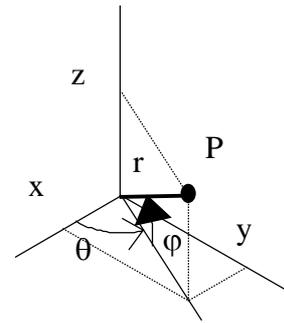
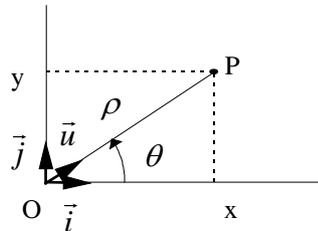
$$O\vec{P} = \rho.\vec{u} \text{ avec } \theta = (\vec{i}, \vec{u})$$

- **Dans l'espace:** 3 paramètres

coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ :  $O\vec{P} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

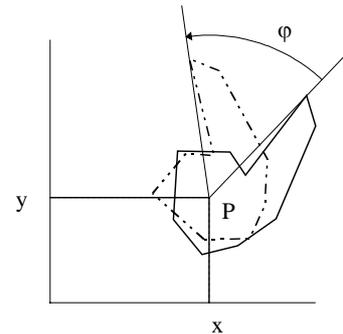
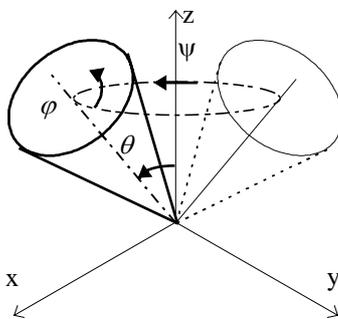
coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ :  $O\vec{P} = \rho.\vec{u} + z.\vec{k}$  avec  $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$

coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ :  $O\vec{P} = r.\vec{n}$  avec  $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$  et  $\varphi = (\vec{u}, \vec{n})$



#### 12- Position d'un solide

- **Dans le plan:** 3 paramètres, deux pour préciser la position d'un point particulier du solide et un paramètre de rotation



- **Dans l'espace:** 6 paramètres; trois paramètres pour préciser la position d'un point particulier P du solide (paramètres de translation et 3 paramètres fixant la position d'un point quelconque M par rapport à ce point P (en général paramètres de rotation). Ces paramètres sont appelés angles d'EULER: précession, nutation, rotation propre.
- Dans le cas d'un solide ayant un point fixe, 3 paramètres suffisent.

### 2- NOTION DE MOUVEMENT ET DE REPOS - REPERES ABSOLU ET RELATIF - REPERES DE REFERENCE ET DE PROJECTION

Un point P est dit en **mouvement par rapport à un repère** si au moins une de ses coordonnées varie en fonction du temps. Si toutes ses coordonnées restent constantes, on dit qu'il est au **repos par rapport à ce repère**.

Cette **notion** est **relative**: un voyageur assis dans un train est en mouvement par rapport à un repère lié à la terre et est au repos par rapport à un repère lié au train.

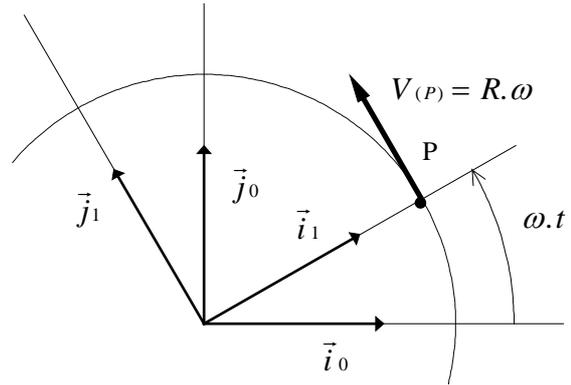
Dans la suite de ce cours, nous appellerons  $(T_0)$  le **repère absolu ou de référence** et  $(T_1)$  le **repère mobile**. Les bases associées à ces repères seront toujours orthonormées directes.

On appelle **mouvement d'entraînement** le mouvement permettant de passer de  $(T_0)$  à  $(T_1)$ .

Examinons maintenant la différence entre **repère de référence** et **repère de projection**.

Pour cela, considérons l'exemple d'un mouvement circulaire uniforme ( $\omega$  constante).

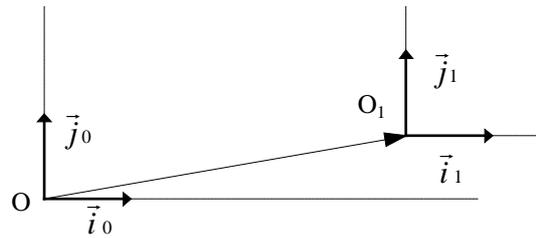
Dans ce cas, on sait que la vitesse est tangente au cercle et que son module est  $R.\omega$ . Le repère de référence est  $(T_0)$  et  $R.\omega$  représente la vitesse par rapport à ce repère. On peut exprimer les composantes du vecteur vitesse dans  $(T_0)$ , mais il est plus facile de les exprimer dans le repère mobile  $(T_1)$ , en effet on a simplement  $\vec{V}_{(P)} = R.\omega.\vec{j}_1$ .



On a alors exprimé la vitesse du point P **par rapport à**  $(T_0)$  en exprimant ses composantes **dans** un autre repère  $(T_1)$ .  $(T_0)$  est le repère de référence tandis que  $(T_1)$  est le repère de projection.

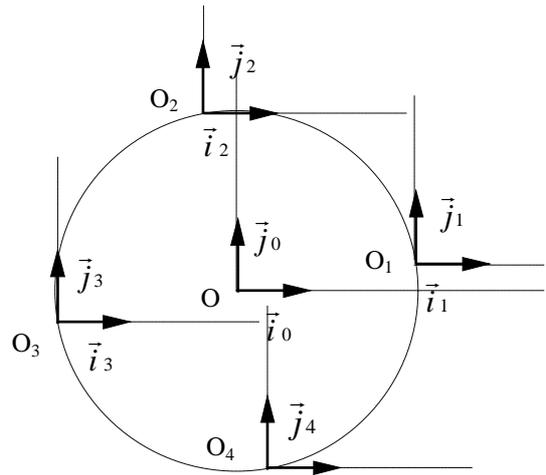
### 21- Mouvement d'entraînement de translation

$(T_1)$  se déduit de  $(T_0)$  par une translation de vecteur  $O\vec{O}_1$ :



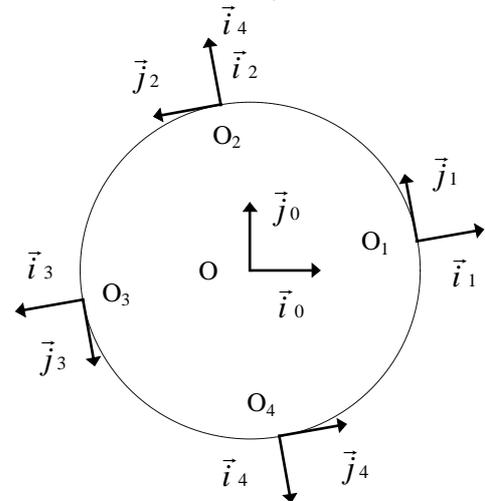
### 22- Mouvement d'entraînement de translation circulaire

Le sommet du repère mobile  $(T_1)$  se déplace sur un cercle, mais ses vecteurs restent équipollents à ceux de  $(T_0)$ .



### 22- Mouvement d'entraînement de rotation

Le sommet du repère mobile  $(T_1)$  se déplace sur un cercle, et ses vecteurs suivent le mouvement de rotation.



### 3- CINEMATIQUE DU POINT

#### 31- Définitions générales

##### 311- Trajectoire:

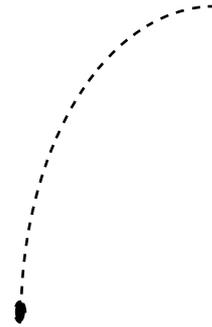
On appelle trajectoire d'un point le lieu de ce point P dans un repère donné. La trajectoire dépend du repère choisi.

**Exemple:** trajectoire d'une goutte de pluie

Pour un repère lié au sol



Pour un repère lié à un train

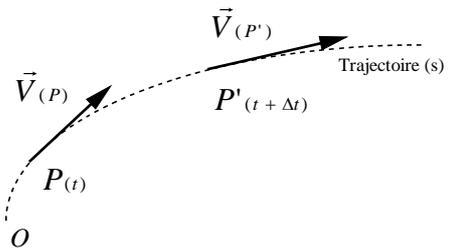


##### 312- Vitesses et accélérations d'un point:

- Vitesse moyenne de P à P':  $\vec{V}_{moy} = \frac{PP'}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$

- Vitesse instantanée de P:  $\vec{V}_{(P)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

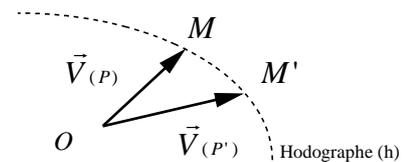
Si  $OP = s$  alors  $\vec{V}_{(P)} = \frac{ds}{dt} \vec{t} = v \cdot \vec{t}$  avec  $\vec{t}$  le vecteur unitaire tangent à la trajectoire (S)



Construisons l'hodographe, lieu des points M et M' tels que  $O\vec{M} = \vec{V}_{(P)}$ , O étant un point fixe

- Accélération moyenne de P à P':  $\vec{\gamma}_{moy} = \frac{MM'}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta t}$

- Accélération instantanée de P:  $\vec{\gamma}_{(P)} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d^2\vec{P}}{dt^2}$



#### 32- Expressions analytiques de la vitesse et de l'accélération d'un point

##### 321- Coordonnées cartésiennes

- $O\vec{P} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$

- $\vec{V}_{(P)} = \frac{dO\vec{P}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{k}$

$$\vec{V}_{(P)} = \dot{x}(t) \cdot \vec{i} + \dot{y}(t) \cdot \vec{j} + \dot{z}(t) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{V}_{(P)} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}$$

- $\vec{\gamma}_{(P)} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}$

**322- Application à la dérivation d'un vecteur mobile**

Soit le point P tel que  $O\vec{P} = \vec{u}$  avec  
 $\vec{u} = \cos \theta(t) \cdot \vec{i} + \sin \theta(t) \cdot \vec{j}$

$$\vec{V}_{(P)} = \frac{dO\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d \cos \theta(t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{d \sin \theta(t)}{dt} \cdot \vec{j}$$

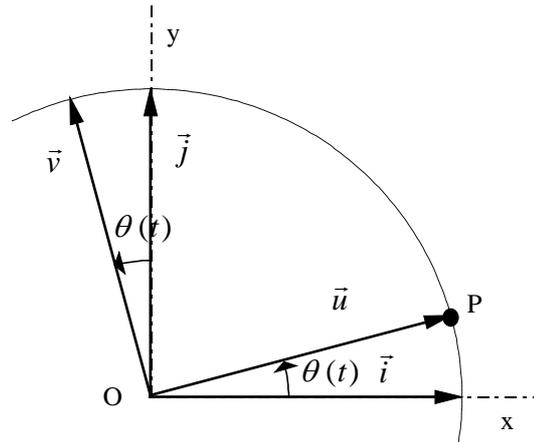
$$= -\dot{\theta}(t) \cdot \sin \theta(t) \cdot \vec{i} + \dot{\theta}(t) \cdot \cos \theta(t) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{V}_{(P)} = -\dot{\theta} \cdot \sin \theta \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \vec{j}$$

$$= \dot{\theta} \cdot (-\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j}) = \dot{\theta} \cdot \vec{v}$$

soit:

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{v}}$$



**Remarques:**

•  $\vec{u}$  et  $\frac{d\vec{u}}{dt} (= \dot{\theta} \cdot \vec{v})$  appartiennent au plan  $(Ox_0y_0)$ . Par conséquent, on peut écrire  $\frac{d\vec{u}}{dt}$  est le résultat du produit vectoriel d'un vecteur  $\vec{\Omega}$ , perpendiculaire au plan  $(Ox_0y_0)$ , et du vecteur  $\vec{u}$ . C'est à dire:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \cdot \vec{v}$$

En identifiant, on en déduit:

$$\boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta} \cdot \vec{k}}$$

- Ce vecteur est appelé **vecteur rotation** et est tel que:
  - son axe est perpendiculaire au plan où se produit la rotation
  - son module est égal à la vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \frac{\theta}{dt}$

- De la même façon, on obtient:  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}$

**323- Coordonnées cylindriques**

•  $O\vec{P} = \rho \cdot \vec{u} + z \cdot \vec{k}$

•  $\vec{V}_{(P)} = \frac{dO\vec{P}}{dt} = \frac{d\rho \cdot \vec{u}}{dt} + \frac{dz \cdot \vec{k}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \vec{u} + \rho \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} + z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}$

$$= \rho \dot{\theta} \cdot \vec{v} + \dot{\rho} \cdot \vec{u} + \dot{z} \cdot \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V}_{(P)} = \rho \dot{\theta} \cdot \vec{v} + \dot{\rho} \cdot \vec{u} + \dot{z} \cdot \vec{k}}$$

•  $\vec{\gamma}_{(P)} = \frac{d\vec{V}_{(P)}}{dt} = \frac{d^2 O\vec{P}}{dt^2} = \frac{d(\rho \dot{\theta} \cdot \vec{v})}{dt} + \frac{d(\dot{\rho} \cdot \vec{u})}{dt} + \frac{d(\dot{z} \cdot \vec{k})}{dt} = \dot{\rho} \dot{\theta} \cdot \vec{v} + \rho \ddot{\theta} \cdot \vec{v} + \rho \dot{\theta} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \ddot{\rho} \cdot \vec{u} + \dot{\rho} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \ddot{z} \cdot \vec{k}$

$$\boxed{\vec{\gamma}_{(P)} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \cdot \vec{u} + (2 \cdot \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \cdot \vec{v} + \ddot{z} \cdot \vec{k}}$$

• **Cas particulier du mouvement hélicoïdal**

♦  $\rho = R = cste$  d'où on en déduit  $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

♦  $z = h.\theta$ ,  $h$  étant le pas de l'hélice.

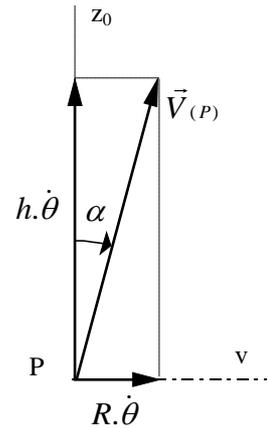
$$\vec{OP} = R.\vec{u} + h\theta.\vec{k}$$

$$\vec{V}_{(P)} = R\dot{\theta}.\vec{v} + h\dot{\theta}.\vec{k}$$

$tg \alpha = \frac{R}{h} = cste$ , le vecteur vitesse forme un angle constant avec la

génératrice du cylindre sur lequel s'enroule l'hélice.

Si  $\theta = \omega t + \varphi$ , le mouvement est dit hélicoïdal uniforme



• **Cas particulier du mouvement plan**

♦  $z = cste$  d'où on en déduit  $\dot{z} = \ddot{z} = 0$

$$\vec{V}_{(P)} = \underbrace{\rho\dot{\theta}.\vec{v}}_{\text{vitesse orthoradiale}} + \underbrace{\dot{\rho}.\vec{u}}_{\text{vitesse radiale}}$$

$$\vec{\gamma}_{(P)} = \underbrace{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2).\vec{u}}_{\text{accélération radiale}} + \underbrace{(2.\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}).\vec{v}}_{\text{accélération orthoradiale}}$$

• **Cas particulier du mouvement circulaire**

♦  $\rho = R = cste$  d'où on en déduit  $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

♦  $z = cste$  d'où on en déduit  $\dot{z} = \ddot{z} = 0$

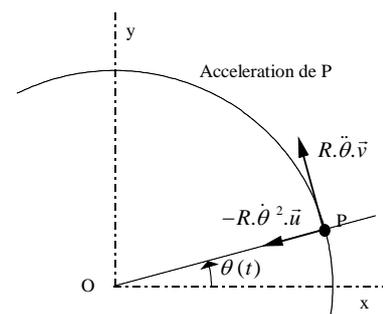
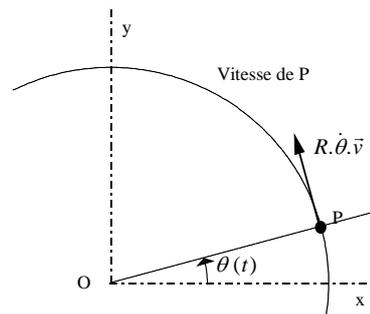
$$\vec{V}_{(P)} = \underbrace{R\dot{\theta}.\vec{v}}_{\text{vitesse tangentielle}}$$

$$\vec{\gamma}_{(P)} = \underbrace{-R\dot{\theta}^2.\vec{u}}_{\text{accélération normale}} + \underbrace{R\ddot{\theta}.\vec{v}}_{\text{accélération tangentielle}}$$

Si  $\theta = \omega t + \varphi$  avec  $\omega$  constante, le mouvement est dit circulaire uniforme

$$\vec{V}_{(P)} = \underbrace{R\omega.\vec{v}}_{\text{vitesse tangentielle}} = V.\vec{v}$$

$$\vec{\gamma}_{(P)} = \underbrace{-R\omega^2.\vec{u}}_{\text{accélération normale centripète}} = -\frac{V^2}{R}.\vec{u}$$



**33- Dissociation des paramètres**

Supposons que la position du point P dépende de  $n$  paramètres indépendants. Il est possible de bloquer tous les paramètres sauf un,  $\theta$ , que l'on fait varier en fonction du temps. On obtient alors la

vitesse  $\vec{V}_{\theta_i(P)}$  relative au paramètre  $\theta_i$ . En additionnant toutes ces vitesses, on détermine la vitesse du point P.

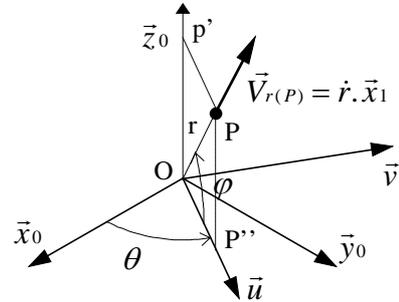
$$\vec{V}_0(P) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{V}_{\theta_i(P)}$$

**Exemple d'un point P dont la position est exprimée en coordonnées sphériques:  $(r, \theta, \varphi)$  :**

$$O\vec{P} = r \cdot \vec{n}$$

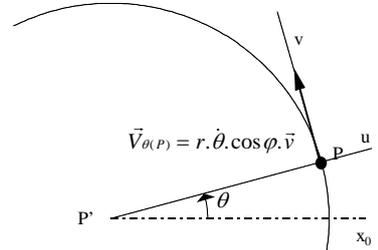
- $r$  varie,  $(\theta, \varphi)$  sont bloqués

Le mouvement de P est une translation le long de l'axe  $O\vec{n}$ . La vitesse de déplacement du point P est donc:  $\vec{V}_{r(P)} = \dot{r} \cdot \vec{n}$



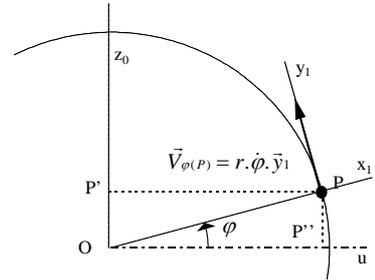
- $\theta$  varie,  $(r, \varphi)$  sont bloqués

Le mouvement du point P est une rotation de centre P' de rayon  $P'P = r \cdot \cos \varphi$  et de vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ , dans le plan  $(P', \vec{i}, \vec{j})$ . La vitesse de P est donc:  $\vec{V}_{\theta(P)} = r \cos \varphi \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{v}$



- $\varphi$  varie,  $(r, \theta)$  sont bloqués

Le mouvement du point P est une rotation de centre O de rayon  $OP = r$  et de vitesse angulaire  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  dans le plan  $(O, \vec{u}, \vec{z})$ . La vitesse de P est donc:  $\vec{V}_{\varphi(P)} = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{t}$



• globalement la vitesse du point P par rapport à  $(T_0)$  sera donc:

$$\vec{V}_0(P) = \vec{V}_r(P) + \vec{V}_{\theta(P)} + \vec{V}_{\varphi(P)} = \dot{r} \cdot \vec{n} + r \cos \varphi \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{v} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{t}$$

#### **4- CINEMATIQUE DU SOLIDE**

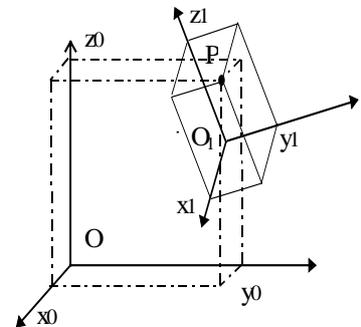
Soit deux repères:

$T_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  le repère de référence fixe

$T_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  le repère mobile

Appelons  $(x_1, y_1, z_1)$  les coordonnées d'un point P dans  $(T_1)$ ; la relation vectorielle

$$O\vec{P} = O\vec{O}_1 + O_1\vec{P} \text{ peut s'écrire } O\vec{P} = O\vec{O}_1 + x_1 \cdot \vec{i}_1 + y_1 \cdot \vec{j}_1 + z_1 \cdot \vec{k}_1$$



## 41- Calcul des vitesses

En dérivant l'expression du vecteur  $O\vec{P}$ , nous obtenons:

$$\vec{V}_0(P) = \vec{V}_0(O1) + \dot{x}_1 \cdot \vec{i}_1 + x_1 \cdot \frac{d\vec{i}_1}{dt} + \dot{y}_1 \cdot \vec{j}_1 + y_1 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt} + \dot{z}_1 \cdot \vec{k}_1 + z_1 \cdot \frac{d\vec{k}_1}{dt} \text{ soit:}$$

$$\vec{V}_0(P) = \underbrace{\left( \vec{V}_0(O1) + x_1 \cdot \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \cdot \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right)}_{(1)} + \underbrace{\left( \dot{x}_1 \cdot \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \vec{k}_1 \right)}_{(2)}$$

- Le terme (1) représente la vitesse qu'aurait le point P si ses coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  dans  $(T_1)$  étaient constantes, c'est à dire si P était fixe par rapport à  $(T_1)$ . Ce terme représente la **vitesse d'entraînement** du point P. On la note:  $\vec{V}_e(P)$ .
- Le terme (2) représente la vitesse qu'aurait le point P si les paramètres fixant la position de  $(T_1)$  par rapport à  $(T_0)$  étaient constants, c'est à dire si  $(T_1)$  était fixe par rapport à  $(T_0)$ . C'est la vitesse du point P par rapport à  $(T_1)$  appelée aussi la **vitesse relative** du point P. On la note:  $\vec{V}_r(P)$ .

Ainsi on obtient la **vitesse absolu du point P** ou vitesse du point P par rapport à  $(T_0)$  par

$$\vec{V}_0(P) = \vec{V}_a(P) = \vec{V}_e(P) + \vec{V}_r(P)$$

## 42- Cas où P est fixe dans $(T_1)$ : Transport de vitesses

Si le point P est fixe par rapport au repère  $(T_1)$ , c'est à dire si le repère  $(T_1)$  est lié au mouvement du solide auquel appartient le point P, alors la vitesse relative de P est nulle, d'où on peut écrire:

$$\vec{V}_0(P) = \vec{V}_0(O1) + x_1 \cdot \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \cdot \frac{d\vec{k}_1}{dt}$$

Or nous pouvons écrire:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}_1 \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j}_1 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}_1$$

$\vec{\Omega}$  est ici le vecteur rotation permettant de passer du repère de référence  $(T_0)$  au repère mobile  $(T_1)$ ; on le note également  $\vec{\Omega}_{01}$ . D'où:

$$\begin{aligned} \vec{V}_0(P) &= \vec{V}_0(O1) + x_1 \cdot \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{i}_1 + y_1 \cdot \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{j}_1 + z_1 \cdot \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{k}_1 \\ &= \vec{V}_0(O1) + \vec{\Omega}_{01} \wedge (x_1 \cdot \vec{i}_1 + y_1 \cdot \vec{j}_1 + z_1 \cdot \vec{k}_1) \end{aligned}$$

soit:

$$\vec{V}_0(P) = \vec{V}_0(O1) + \vec{\Omega}_{01} \wedge O_1\vec{P}$$

### Remarques:

- Le point O1 est l'origine du repère  $(T_1)$ . Le repère  $(T_1)$  est lié au solide (S) auquel appartient le point P, on peut donc noter  $\vec{\Omega}_{01} = \vec{\Omega}_S$ . En généralisant la relation obtenue ci dessus, on peut écrire entre deux points A et B appartenant à un même solide (S):

$$\vec{V}_0(B) = \vec{V}_0(A) + \vec{\Omega}_S \wedge A\vec{B}$$

- Cette relation est appelé relation de transport des vitesses, valable entre deux points appartenant à un même solide, et semblable dans sa forme à une relation de transport d'un moment de torseur.

### 43- Calcul des accélérations

En dérivant l'expression du vecteur  $\vec{V}_a^{(P)}$ , nous obtenons l'accélération:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_0^{(P)} = & \vec{\gamma}_0^{(O1)} + \dot{x}_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + x_1 \frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + \dot{y}_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + y_1 \frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + \dot{z}_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} + z_1 \frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2} \\ & + \ddot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{x}_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + \ddot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{y}_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + \ddot{z}_1 \vec{k}_1 + \dot{z}_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} + \dot{z}_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} \end{aligned}$$

soit:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_0^{(P)} = & \underbrace{\left( \vec{\gamma}_0^{(O1)} + x_1 \frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1 \frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2} \right)}_{(1)} \\ & + \underbrace{\left( \ddot{x}_1 \vec{i}_1 + \ddot{y}_1 \vec{j}_1 + \ddot{z}_1 \vec{k}_1 \right)}_{(2)} + 2 \cdot \underbrace{\left( \dot{x}_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + \dot{y}_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + \dot{z}_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right)}_{(3)} \end{aligned}$$

- Le terme (1) représente l'accélération qu'aurait le point P si ses coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  dans  $(T_1)$  étaient constantes, c'est à dire si P était fixe par rapport à  $(T_1)$ . Ce terme **représente l'accélération d'entraînement** du point P. On la note:  $\vec{\gamma}_e^{(P)}$ .
- Le terme (2) représente l'accélération qu'aurait le point P si les paramètres fixant la position de  $(T_1)$  par rapport à  $(T_0)$  étaient constants, c'est à dire si  $(T_1)$  était fixe par rapport à  $(T_0)$ . C'est l'accélération du point P par rapport à  $(T_1)$  appelée aussi **l'accélération relative** du point P. On la note:  $\vec{\gamma}_r^{(P)}$ .
- Le terme (3) est appelée **l'accélération de CORIOLIS**<sup>1</sup> et notée:  $\vec{\gamma}_c^{(P)}$ .

Ainsi on obtient l'accélération absolu du point P ou accélération du point P par rapport à  $(T_0)$  par

$$\vec{\gamma}_0^{(P)} = \vec{\gamma}_a^{(P)} = \vec{\gamma}_e^{(P)} + \vec{\gamma}_r^{(P)} + \vec{\gamma}_c^{(P)}$$

#### 431- Expression vectorielle de l'accélération de CORIOLIS

$$\vec{\gamma}_c^{(P)} = 2 \cdot \left( \dot{x}_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + \dot{y}_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + \dot{z}_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right)$$

Or nous pouvons écrire:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{i}_1 \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{j}_1 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{k}_1$$

$\vec{\Omega}_{01}$  est le vecteur rotation permettant de passer du repère de référence  $(T_0)$  au repère mobile  $(T_1)$ , on peut dire que c'est le vecteur rotation d'entraînement, noté  $\vec{\Omega}_e$

$$\vec{\gamma}_c^{(P)} = 2 \cdot \left( \dot{x}_1 \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{k}_1 \right) = 2 \cdot \vec{\Omega}_{01} \wedge \left( \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1 \right)$$

soit:

<sup>1</sup> **CORIOLIS Gaspard:** (Paris 1792-1843) Ingénieur et mathématicien français, auteur de travaux de cinématique. Il a mis en évidence la force qui porte son nom, force de déviation due à la rotation de la terre et s'exerçant sur les corps en mouvement à la surface de celle-ci. *Le Petit Larousse Illustré 1995*

$$\vec{\gamma}_c(P) = 2 \cdot \vec{\Omega}e \wedge \vec{V}_r(P)$$

#### **432- Cas où l'accélération de CORIOLIS est nulle**

L'accélération de CORIOLIS est nulle si le produit  $\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r(P)$  est nul, ce qui se produit pour:

- $\vec{\Omega}e = \vec{0}$ : Le mouvement d'entraînement est une translation
- $\vec{V}_r(P) = \vec{0}$ : Le point P est fixe dans le repère ( $T_1$ )
- $\vec{\Omega}e$  et  $\vec{V}_r(P)$  sont colinéaires: cas très rare

#### **44- Vitesse de glissement - Condition de roulement sans glissement**

Considérons deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact à un instant donné.

Appelons  $I_1$  et  $I_2$  les points de ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact à cet instant. On définit la vitesse de glissement  $\vec{U}_{1/2}$  du solide ( $S_1$ ) par rapport le solide ( $S_2$ ) par:

$$\vec{U}_{1/2} = \vec{V}_a(I_1) - \vec{V}_a(I_2)$$

Si la condition de **roulement sans glissement** est réalisée, cette vitesse est nulle soit:

$$\vec{V}_a(I_1) = \vec{V}_a(I_2)$$

#### **Remarques:**

- Les points  $I_1$  et  $I_2$  ne coïncident qu'à un instant t, aussi l'égalité de leurs vitesses ne conduit en aucun cas à l'égalité de leurs accélérations:

$$\vec{\gamma}_a(I_1) \neq \vec{\gamma}_a(I_2)$$

- Les points  $I_1$  et  $I_2$  ne sont pas fixe par rapport à ( $S_1$ ) et ( $S_2$ )

# CHAP. 5: GEOMETRIE DES MASSES

La géométrie des masses permet de déterminer les centres de gravité des solides et la matrice d'inertie des solides, notions utilisées dans les chapitres suivants.

## 1- CENTRE DE GRAVITE

### 11- Systèmes de solides ponctuels

• Soit une distribution de masse (Pi, mi), le centre de gravité G est défini par le barycentre des n points Pi affectés des coefficients égaux aux masses mi.

$$M \cdot O\vec{G} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot O\vec{P}_i \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot G\vec{P}_i = \vec{0}$$

### 12- Corps matériels homogènes

#### 121- Définitions générales

• **Ligne matérielle:** (tige, fil, ...)

$$M \cdot O\vec{G} = \lim_{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{i=n} \Delta m_i \cdot O\vec{P}_i = \int_S O\vec{P} \cdot dm$$

Pour une tige homogène, on a:

$$L \cdot O\vec{G} = \int_L O\vec{P} \cdot dl$$

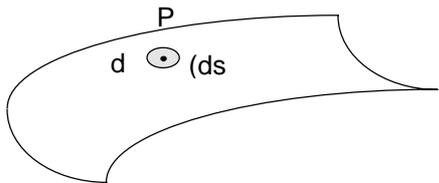
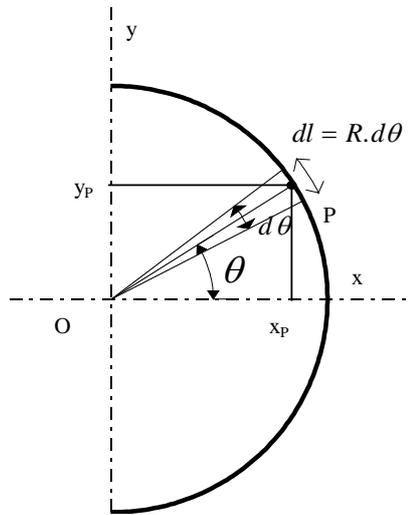
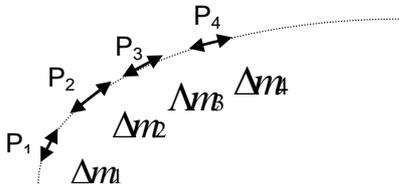
Exemple: demi-cerceau

$$L = \pi \cdot R \quad P \begin{cases} x_P = R \cdot \cos \theta \\ y_P = R \cdot \sin \theta \end{cases}$$

$$L \cdot x_G = \int_L x_P \cdot dl = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} R \cdot \cos \theta \cdot R d\theta = R^2 \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta \cdot d\theta = 2 \cdot R^2$$

$$L \cdot y_G = \int_L y_P \cdot dl = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} R \cdot \sin \theta \cdot R d\theta = R^2 \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin \theta \cdot d\theta = 0$$

d'où: 
$$O\vec{G} \begin{cases} x_G = \frac{2R}{\pi} \\ y_G = 0 \end{cases}$$



• **Surface matérielle:** (plaque, coque, ...)

$$M \cdot O\vec{G} = \int_S O\vec{P} \cdot dm$$

Pour une surface homogène, on a:

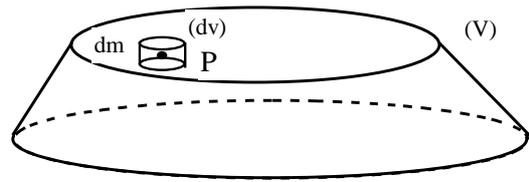
$$S \cdot O\vec{G} = \int_S O\vec{P} \cdot ds$$

• **Volume matériel:**

$$M \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} \cdot dm$$

Pour un volume homogène, on a:

$$V \cdot \vec{OG} = \int_V \vec{OP} \cdot dv$$



**122- Simplifications éventuelles**

• Si un ensemble de masse M est composé de plusieurs solides de masse Mi, il est possible de trouver le centre de gravité G en concentrant les masses Mi aux centres de gravité Gi et en écrivant:

$$M \cdot \vec{OG} = \sum_{i=1}^{i=n} M_i \cdot \vec{OG}_i$$

• Si un corps admet un plan, un axe ou un centre de symétrie, alors son centre de gravité se trouve dans ce plan, sur cet axe ou ce point.

**123- Méthodes de calcul**

**a) Théorèmes de GULDIN<sup>2</sup>**

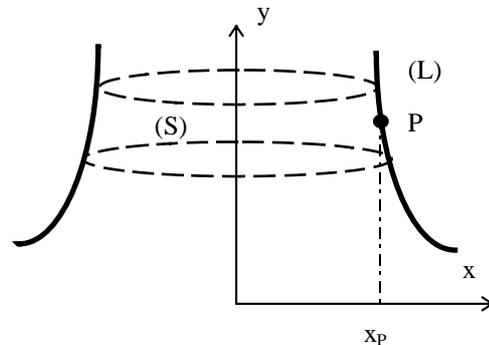
• Soit une courbe (L) tournant autour de l'axe Oy, ne le coupant pas. L'élément dl engendre une surface ds telle que:

$$ds = dl \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_p$$

La surface totale engendrée sera :

$$S = 2 \cdot \pi \cdot \int_L x_p \cdot dl = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot x_G$$

compte tenu de la définition du centre de gravité d'une ligne matérielle.



• Soit une surface plane (S) tournant autour de l'axe Oy, ne le coupant pas. L'élément ds engendre un volume dv tel que:

$$dv = ds \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_p$$

Le volume total engendré sera :

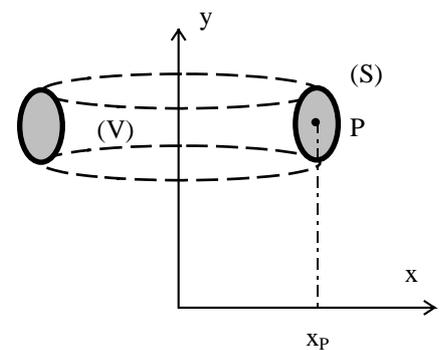
$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_S x_p \cdot ds = 2 \cdot \pi \cdot S \cdot x_G$$

compte tenu de la définition du centre de gravité d'une surface matérielle.

• **Exemple:** Centre de gravité d'une demi plaque circulaire.

$$V = 2 \cdot \pi \cdot S \cdot x_G$$

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot x_G \Rightarrow x_G = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$$



<sup>2</sup> **GULDIN Paul:** (1577-1643) Mathématicien suisse surtout connu pour la découverte de deux théorèmes qu'il publia dans son *Centrobaryca* (1635-1641) et qui portent son nom:

Ces théorèmes avaient été découverts par Pappus douze siècles auparavant et figure dans sa *Collection Mathématique*. La démonstration de GULDIN (distincte de celle de J. Kepler qui utilise des infiniment petits) comportait un certain nombre d'erreurs que corrigea le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri. *Encyclopaedia Universalis*, 1980.

b- Surfaces planes

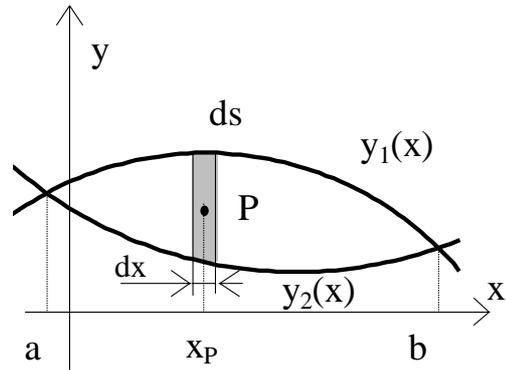
• Surfaces planes définies sous forme cartésienne

On connaît  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$

P est le centre de gravité de  $ds$

$$P \begin{cases} x_P \\ y_P = \frac{y_1(x_P) + y_2(x_P)}{2} \end{cases}$$

$$ds = [y_1(x_P) - y_2(x_P)].dx \quad S = \int_a^b ds$$



d'où:

$$S \cdot x_G = \int_a^b x_P \cdot ds$$

$$S \cdot y_G = \int_a^b y_P \cdot ds$$

• Surfaces planes définies sous forme polaire

On connaît la fonction donnant la limite de la surface  $\rho = f(\theta)$

l'élément  $ds$  est assimilé à un triangle de base  $\rho \cdot d\theta$ , de hauteur  $\rho$ . On en déduit

l'expression de  $ds$ :  $ds = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot d\theta$  et donc

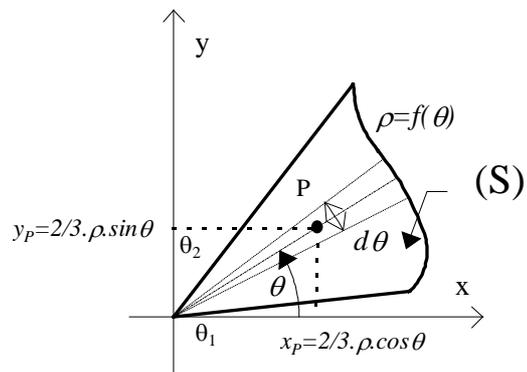
$$S = \frac{1}{2} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 \cdot d\theta$$

P est le centre de gravité de  $ds$

$$P \begin{cases} x_P = \frac{2}{3} \rho \cdot \cos \theta \\ y_P = \frac{2}{3} \rho \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \text{d'où:}$$

$$S \cdot x_G = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x_P \cdot ds = \frac{1}{3} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3(\theta) \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

$$S \cdot y_G = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y_P \cdot ds = \frac{1}{3} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3(\theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

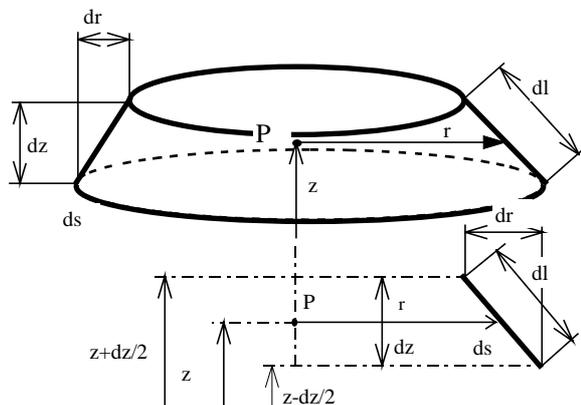


• Surfaces de révolution

Si Oz est l'axe de révolution, on a:  $x_G = y_G = 0$

L'élément de surface  $ds$  se trouve entre les plans  $dz - \frac{dz}{2}$  et  $dz + \frac{dz}{2}$ ,  $dz$  petit

$$ds = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl \quad \text{soit: } S = \int 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl \quad \text{d'où:}$$



$$S \cdot z_G = \int_S z \cdot ds = \int_S z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl$$

car  $ds$  et étant petit, on peut considérer que  $P$ , centre de gravité de  $ds$  se trouve en  $z_P = z$

#### • Volumes de révolution

De même, on aura:

$$dv = \pi \cdot r^2 \cdot dz \text{ soit: } V = \int \pi \cdot r^2 \cdot dz \text{ d'où:}$$

$$V \cdot z_G = \int_V z \cdot dv = \int_V z \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dz$$

#### **Remarque:**

• Il est nécessaire de transformer toutes les quantités en fonction de variables indépendantes avant de procéder à l'intégration.

## **2- MOMENTS D'INERTIE ET PRODUITS D'INERTIE**

### **21- Systèmes de solides ponctuels**

• Le moment d'inertie d'un système ( $P_i, m_i$ ) par rapport à un plan  $\pi$ , à une droite  $\Delta$  ou à un point  $O$  est défini par:

$$I = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot d_i^2$$

$d_i$  représentant la distance de  $P_i$  au plan  $\pi$ , à la droite  $\Delta$  ou au point  $O$

#### **Remarque:**

• Un moment d'inertie est toujours positif ou nul.

$$I \geq 0$$

• On appelle produits d'inertie d'un système ( $P_i, m_i$ ) par rapport à un système d'axe  $Ox, Oy, Oz$  les expressions:

$$\begin{aligned} \bullet D &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot y_i \cdot z_i \\ \bullet E &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot x_i \cdot z_i \\ \bullet F &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot x_i \cdot y_i \end{aligned}$$

### **22- Corps matériels homogènes**

• Le moment d'inertie d'un corps matériel homogène ( $S$ ) par rapport à un plan  $\pi$ , à une droite  $\Delta$  ou à un point  $O$  est défini par:

$$I = \int_S d^2 \cdot dm$$

$d$  représentant la distance du point courant  $P$ , centre de gravité de l'élément élémentaire  $dm$ , au plan  $\pi$ , à la droite  $\Delta$  ou au point  $O$

• Les produits d'inertie se définissent alors par:

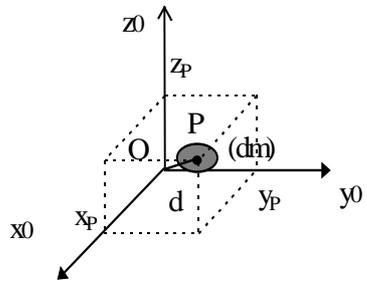
$$\begin{aligned} \bullet D &= \int_S y_P \cdot z_P \cdot dm \\ \bullet E &= \int_S x_P \cdot z_P \cdot dm \\ \bullet F &= \int_S x_P \cdot y_P \cdot dm \end{aligned}$$

• Expressions analytique des moments d'inertie

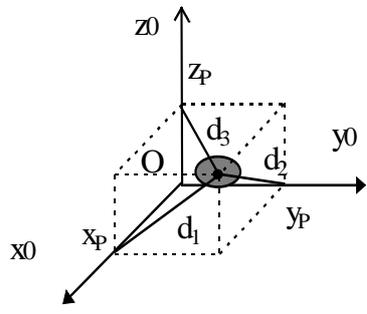
♦ par rapport au point O:

$$O\vec{P}_{b0} \begin{matrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{matrix} \quad d = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$$

$$I_o = \int_S (x_P^2 + y_P^2 + z_P^2) \cdot dm$$



♦ par rapport aux axes Ox, Oy, Oz



Axe Ox:  $d_1 = \sqrt{y_P^2 + z_P^2}$

$$I_{Ox} = A = \int_S (y_P^2 + z_P^2) \cdot dm$$

Axe Oy:  $d_2 = \sqrt{x_P^2 + z_P^2}$

$$I_{Oy} = B = \int_S (x_P^2 + z_P^2) \cdot dm$$

Axe Oz:  $d_3 = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

$$I_{Oz} = \int_S (x_P^2 + y_P^2) \cdot dm$$

Soit: 
$$I_o = \frac{I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz}}{2}$$

♦ par rapport aux plans de bases yOz, xOy, xOz

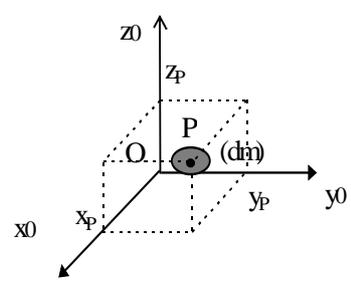
Plan yOz:  $d = x_P \quad I_{yOz} = \int_S (x_P^2) \cdot dm$

Plan xOz:  $d = y_P \quad I_{xOz} = \int_S (y_P^2) \cdot dm$

Plan xOy:  $d = z_P \quad I_{xOy} = \int_S (z_P^2) \cdot dm$

Soit:

$$\begin{aligned} I_o &= I_{xOy} + I_{yOz} + I_{xOz} \\ I_{Ox} &= I_{xOz} + I_{xOy} \\ I_{Oy} &= I_{xOy} + I_{yOz} \\ I_{Oz} &= I_{xOz} + I_{yOz} \end{aligned}$$



### 23- Matrice d'inertie

Pour un système d'axes Ox, Oy, Oz, on définit la matrice d'inertie d'un solide en un point O sous la forme:

$$I_{(O, (S), b)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

## 24- Transport des moments et produits d'inertie

### 241- Axes parallèles aux axes de bases et passant par G

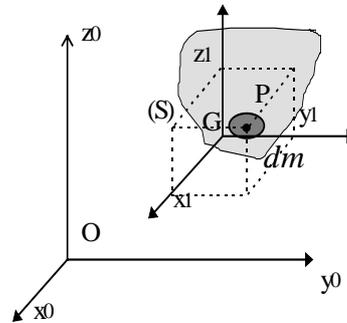
#### 2411- Moments d'inertie: Théorème des HUYGENS<sup>3</sup>

$$O\vec{P}_{(b0)} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} \quad G\vec{P}_{(b0)} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \quad O\vec{G}_{(b0)} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$

$$C_0 = I_{Oz_0} = \int_S (x_0^2 + y_0^2) \cdot dm$$

$$C_1 = I_{Oz_1} = \int_S (x_1^2 + y_1^2) \cdot dm \quad \text{or}$$

$$O\vec{P} = O\vec{G} + G\vec{P} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 + a \\ y_0 = y_1 + b \\ z_0 = z_1 + c \end{cases}$$



$$\bullet \text{ d'où: } C_0 = \int_S ((x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2) \cdot dm = \int_S (x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + a^2 + b^2) \cdot dm$$

$$= \int_S (x_1^2 + y_1^2) \cdot dm + 2a \cdot \int_S x_1 \cdot dm + 2b \cdot \int_S y_1 \cdot dm + (a^2 + b^2) \cdot \int_S dm$$

car a et b sont des constantes indépendantes de  $dm$ .

$$\bullet \text{ G est le centre de gravité de (S) d'où } \int_S G\vec{P} \cdot dm = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \int_S x_1 \cdot dm = 0 \\ \int_S y_1 \cdot dm = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ de plus } \int_S dm = M \text{ d'où:}$$

$$\boxed{C_0 = C_1 + M(a^2 + b^2)}$$

De même, on obtiendrait:

$$\boxed{A_0 = A_1 + M(b^2 + c^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{B_0 = B_1 + M(a^2 + c^2)}$$

<sup>3</sup> **HUYGENS** Christiaan: (La Haye 1629-1695) Physicien et astronome néerlandais grâce à des instruments de sa fabrication, il découvrit l'anneau de Saturne et la nébuleuse d'Orion. Il émit le premier l'hypothèse que les étoiles sont d'autres soleils très éloignés. En mécanique, il établit la théorie du pendule qu'il utilisa comme régulateur du mouvement des horloges et observa la conservation de la quantité de mouvement lors d'un choc entre deux mobiles. En optique, il expliqua la réflexion et la réfraction au moyen d'une théorie ondulatoire. *Le Petit Larousse Illustré*, 1995.

En généralisant, on obtient:

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe  $\Delta$  passant par un point quelconque O est égal à la somme du moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à  $\Delta$  passant par G le centre de gravité de (S) et le produit de la masse M du solide **par le carré de la distance de l'axe à G**:

$$I_{\Delta O} = I_{\Delta G} + M \cdot d^2$$

2412- Produits d'inertie

$$D_0 = \int_S (y_0 \cdot z_0) \cdot dm$$

$$D_1 = \int_S (y_1 \cdot z_1) \cdot dm \quad \text{or}$$

$$O\vec{P} = O\vec{G} + G\vec{P} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 + a \\ y_0 = y_1 + b \\ z_0 = z_1 + c \end{cases}$$

$$\text{d'où: } D_0 = \int_S ((y_1 + b) \cdot (z_1 + c)) \cdot dm = \int_S (y_1 \cdot z_1 + c \cdot y_1 + b \cdot z_1 + b \cdot c) \cdot dm$$

$$= \int_S (y_1 \cdot z_1) \cdot dm + c \cdot \int_S y_1 \cdot dm + b \cdot \int_S z_1 \cdot dm + b \cdot c \cdot \int_S dm$$

car b et c sont des constantes indépendantes de  $dm$ .

$$\text{G est le centre de gravité de (S) d'où } \int_S G\vec{P} \cdot dm = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \int_S y_1 \cdot dm = 0 \\ \int_S z_1 \cdot dm = 0 \end{cases}$$

$$\text{de plus } \int_S dm = M \text{ d'où:}$$

$$D_0 = D_1 + M(b \cdot c)$$

De même, on obtiendrait:

$$E_0 = E_1 + M(a \cdot c) \quad \text{et} \quad F_0 = F_1 + M(a \cdot b)$$

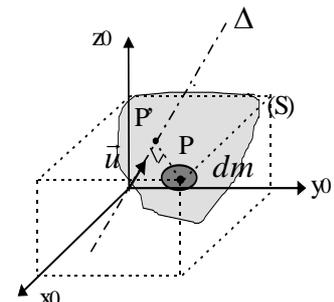
242- Axes quelconque passant par O, sommet du trièdre de base

Soit  $(T_0)$   $Ox_0y_0z_0$  un trièdre de base et  $\Delta$  un axe quelconque passant par O et de vecteur directeur unitaire  $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Soit P' la projection orthogonale du point P sur l'axe  $\Delta$

P'P est la distance de P à l'axe  $\Delta$  d'où:

$$I_{\Delta} = \int_S P' P^2 \cdot dm$$



$$P' P = \|\vec{u} \wedge O\vec{P}\| \quad \text{or} \quad \vec{u} \wedge O\vec{P} = \begin{vmatrix} \alpha & x & \beta.z - \gamma.y \\ \beta & y & \gamma.x - \alpha.z \\ \gamma & z & \alpha.y - \beta.x \end{vmatrix}$$

$$P' P^2 = \alpha^2.(y^2 + z^2) + \beta^2.(z^2 + x^2) + \gamma^2.(x^2 + y^2) - 2.\beta\gamma.yz - 2.\alpha\gamma.xz - 2.\alpha\beta.xy$$

On obtient finalement:

$$I_{\Delta} = \alpha^2 . A + \beta^2 . B + \gamma^2 . C - 2 . \beta\gamma . D - 2 . \alpha\gamma . E - 2 . \alpha\beta . F$$

Ou sous forme matricielle:

$$I_{\Delta} = [\vec{u}^t] . [H_{(O,(S))}] . [\vec{u}]$$

### Remarques:

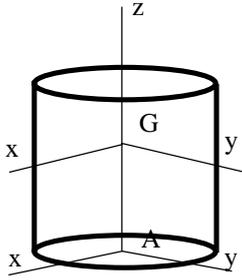
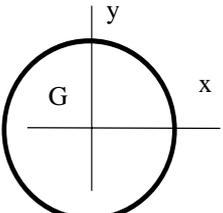
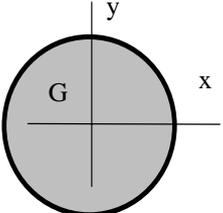
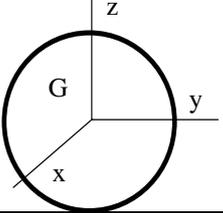
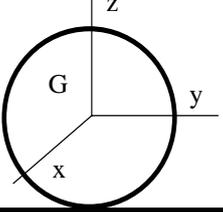
- On appelle axes principaux d'inertie, les axes pour lesquels les produits d'inertie sont nuls
- Dans le cas des surfaces planes, deux des produits d'inertie sont nuls.  
ex surface dans le plan Oxy: pour tous points P de la surface, z = 0 d'où D = E = 0
- Dans le cas des solides de révolution, les axes perpendiculaires à l'axe de révolution jouent le même rôle.

ex volume de révolution autour de Oz:  $I_{Ox} = I_{Oy}$  et  $I_{xOz} = I_{yOz}$ .

D'après les relations vues précédemment, on en déduit que  $A = B = C/2$

## 25- Formulaires

| Matrices en G   | Matrices en A   | Schémas |
|---|---|---------|
| <b>Tige</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{M.L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M.L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  | <b>(M,L)</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{M.L^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M.L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   |         |
| <b>Plaque rectangulaire</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{M.b^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M.a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M.(a^2+b^2)}{3} \end{bmatrix}$                  | <b>(M, 2a*2b)</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{4.M.b^2}{3} & -M.a.b & 0 \\ -M.a.b & \frac{4.M.a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4.M.(a^2+b^2)}{3} \end{bmatrix}$                                    |         |
| <b>Parallélépipède rectangle</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{M.(b^2+c^2)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M.(a^2+c^2)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M.(a^2+b^2)}{3} \end{bmatrix}$ | <b>(M, 2a*2b*2c)</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{4.M.(b^2+c^2)}{3} & -M.a.b & -M.a.c \\ -M.a.b & \frac{4.M.(a^2+c^2)}{3} & -M.b.c \\ -M.a.c & -M.b.c & \frac{4.M.(a^2+b^2)}{3} \end{bmatrix}$ |         |

| Matrices en G   | Matrices en A   | Schémas   |
|---|---|---|
| <b>Cylindre plein</b>   | <b>(M,R,H)</b><br>$\begin{bmatrix} M \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & M \cdot \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}$ |    |
| <b>Couronne circulaire</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{M \cdot R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M \cdot R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & M \cdot R^2 \end{bmatrix}$                             | <b>(M, R)</b>   |    |
| <b>Plaque circulaire</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{M \cdot R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M \cdot R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M \cdot R^2}{2} \end{bmatrix}$                     | <b>(M, R)</b>   |   |
| <b>Sphère creuse</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{2 \cdot M \cdot R^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \cdot M \cdot R^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 \cdot M \cdot R^2}{3} \end{bmatrix}$ | <b>(M, R)</b>   |  |
| <b>Sphère pleine</b><br>$\begin{bmatrix} \frac{2 \cdot M \cdot R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \cdot M \cdot R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 \cdot M \cdot R^2}{5} \end{bmatrix}$ | <b>(M, R)</b>   |  |

## CHAP. 6: CINÉTIQUE

### 1- TORSEUR CINÉTIQUE

#### 11- Définitions

##### 111- Solides Ponctuels

Soit une distribution de masses ponctuelles  $(P_i, m_i)$  (en un point  $P_i$  se trouve concentrée la masse  $m_i$ ); le torseur cinétique en un point A se définit par la donnée de deux vecteurs:

- La résultante cinétique:  $\vec{R}(V) = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i \cdot \vec{V}_{(P_i)})$
- Le moment cinétique au point A:  $\vec{M}(V, A) = \vec{\sigma}_{(A)} = \sum_{i=1}^{i=n} (A\vec{P}_i \wedge m_i \cdot \vec{V}_{(P_i)})$

##### 112- Corps matériels homogènes

De même, pour un corps matériel homogène, on aura:

- La résultante cinétique:  $\vec{R}(V) = \int_S \vec{V}_{(P)} \cdot dm$
- Le moment cinétique au point A:  $\vec{\sigma}_{(A)} = \int_S (A\vec{P} \wedge \vec{V}_{(P)}) \cdot dm$

#### **Remarque:**

- La vitesse d'un point ou d'un solide dépend du repère de référence choisi et donc le torseur cinétique dépend également du repère de référence choisi.

### 12- Expression du torseur cinétique d'un système

#### 121- Résultante cinétique

$$\vec{R}(V) = \int_S \vec{V}_{(P)} \cdot dm = \int_S \left( \frac{dO\vec{P}}{dt} \right) \cdot dm = \frac{d}{dt} \left( \int_S O\vec{P} \cdot dm \right) = \frac{d}{dt} [M \cdot O\vec{G}] = M \cdot \frac{d}{dt} [O\vec{G}] = M \cdot \vec{V}_{(G)}$$

$$\text{d'où: } \boxed{\vec{R}(V) = M \cdot \vec{V}_{(G)}}$$

#### 122- Moment cinétique

##### a- Formule de transport

Le torseur cinétique obéit aux mêmes règles que les autres torseurs et donc:

$$\boxed{\vec{\sigma}_{(B)} = \vec{\sigma}_{(A)} + M \cdot \vec{V}_{(G)} \wedge A\vec{B}}$$

quelques soient les points A et B.

##### b- Moments cinétiques de translation et de rotation

Soient:

( $T_0$ ) un repère fixe ( $O, x_0, y_0, z_0$ ) de référence

( $T_s$ ) un repère mobile ( $G, x_s, y_s, z_s$ ) lié au solide (S) (G représente le centre de gravité de (S).)

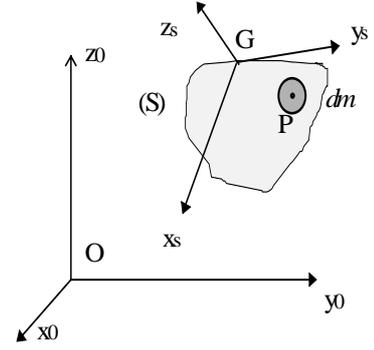
Dans ce cas, on peut écrire d'après la formule de transport des vitesses de deux points d'un même solide:

$$\vec{V}_{(P)} = \vec{V}_{(G)} + \vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}$$

$\vec{\Omega}_s$  représentant le vecteur rotation du solide (S) dans son mouvement par rapport à  $(T_0)$

On peut écrire:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{(O)} &= \int O\vec{P} \wedge \vec{V}_{(P)} dm = \int O\vec{P} \wedge [\vec{V}_{(G)} + \vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}] dm \\ &= \underbrace{\int O\vec{P} \wedge \vec{V}_{(G)} dm}_{(1)} + \underbrace{\int O\vec{P} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}] dm}_{(2)} \end{aligned}$$



• **Calcul du premier terme:** en tenant compte de l'indépendance de G vis à vis du choix de l'élément d'intégration dm et de la définition du centre de gravité

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \int (O\vec{P} \wedge \vec{V}_{(G)}) . dm &= \left( \int O\vec{P} . dm \right) \wedge \vec{V}_{(G)} = M . O\vec{G} \wedge \vec{V}_{(G)} \\ &= O\vec{G} \wedge M . \vec{V}_{(G)} = O\vec{G} \wedge \vec{R}(V) = \vec{R}(V) \wedge G\vec{O} \end{aligned}$$

• **Calcul du second terme:**

On peut écrire:  $O\vec{P} = O\vec{G} + G\vec{P}$

$$(2) \Rightarrow \int O\vec{P} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}] dm = \underbrace{\int O\vec{G} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}] dm}_{(3)} + \underbrace{\int G\vec{P} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}] dm}_{(4)}$$

$$(3) \Rightarrow \int O\vec{G} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}] dm = O\vec{G} \wedge \vec{\Omega}_s \wedge \int G\vec{P} dm = \vec{0}$$

car  $O\vec{G}$  et  $\vec{\Omega}_s$  sont indépendants de  $dm$

$$(4) \Rightarrow \int G\vec{P} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}] dm =$$

$$\text{soient: } \vec{\Omega}_{s(bs)} \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix} \quad G\vec{P}_{(bs)} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \text{On a alors: } \vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}_{(bs)} \begin{vmatrix} qz - ry \\ rx - pz \\ py - qx \end{vmatrix}$$

$$G\vec{P} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}]_{(bs)} \begin{vmatrix} y(py - qx) - z(rx - pz) = p(y^2 + z^2) - qxy - rxz \\ z(qz - ry) - x(py - qx) = q(z^2 + x^2) - ryz - pxy \\ x(rx - pz) - y(qz - ry) = r(x^2 + y^2) - pxz - qyz \end{vmatrix}$$

d'où:

$$\int (G\vec{P} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}])_{(bs)} dm \begin{vmatrix} \int (p(y^2 + z^2) - qxy - rxz) dm = \int p(y^2 + z^2) dm - \int qxy dm - \int rxz dm \\ \int (q(z^2 + x^2) - ryz - pxy) dm = \int q(z^2 + x^2) dm - \int ryz dm - \int pxy dm \\ \int (r(x^2 + y^2) - pxz - qyz) dm = \int r(x^2 + y^2) dm - \int pxz dm - \int qyz dm \end{vmatrix}$$

$$\int (G\vec{P} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}])_{(bs)} dm \begin{vmatrix} p \int (y^2 + z^2) dm - q \int xy dm - r \int xz dm = p . A_G - q . F_G - r . E_G \\ q \int (z^2 + x^2) dm - r \int yz dm - p \int xy dm = -p . F_G + q . B_G - r . D_G \\ r \int (x^2 + y^2) dm - p \int xz dm - q \int yz dm = -p . E_G - q . D_G + r . C_G \end{vmatrix}$$

$$\int (G\vec{P} \wedge [\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}])_{(bs)} dm = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(bs)} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{(bs)} = [H_{(G,S,bs)}] . \vec{\Omega}_s$$

D'où en définitive:

$$\boxed{\vec{\sigma}_{(O)} = [H_{(G,S,bs)}] . \vec{\Omega}_s + \vec{R}(V) \wedge G\vec{O}}$$

en identifiant par rapport à la formule de transport du moment cinétique:

$$\vec{\sigma}_{(O)} = \vec{\sigma}_{(G)} + \vec{R}(V) \wedge G\vec{O}$$

on en déduit:

$$\vec{\sigma}_{(G)} = [II(G,S,bs)].\vec{\Omega}_s$$

- $[II(G,S,bs)].\vec{\Omega}_s$  correspond au moment cinétique qu'on obtiendrait si G était fixe. On peut aussi dire que c'est le moment cinétique du à la rotation autour du point G: c'est le **moment cinétique de rotation**.
- $\vec{R}(V) \wedge G\vec{O}$  correspond au moment cinétique du solide, en concentrant toute sa masse au centre d'inertie G, se déplaçant comme un point matériel par une translation rectiligne ou circulaire: c'est le **moment cinétique de translation**.

**Remarques:**

• Si on a un mouvement autour d'un point fixe O, la vitesse d'un point P quelconque du solide (S) peut s'écrire:  $\vec{V}_{(P)} = \vec{\Omega}_s \wedge O\vec{P}$  d'où on obtient:  $\vec{\sigma}_{(O)} = [II(O,S,bs)].\vec{\Omega}_s$

• Si, de plus, on a un mouvement plan autour de Oz par exemple,  $\vec{\Omega}_s$  est tel que p=0, q=0. On obtient alors:

$$\vec{\sigma}_{(O)} = Co.r.\vec{z} = I_{Oz}.\omega.\vec{z} \text{ avec } r = \omega \text{ vitesse de rotation autour de l'axe Oz}$$

**2- ENERGIE CINETIQUE**

**21- Définition**

**211- Solides Ponctuels**

L'énergie cinétique d'un système de solides ponctuels s'exprime par:

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (m_i . \vec{V}_{(Pi)}^2)$$

**212- Corps matériels homogènes**

De même, pour les corps matériels homogènes, on aura:

$$E_C = \frac{1}{2} \int_S \vec{V}_{(P)}^2 . dm$$

**Remarques:**

- $\vec{V}_{(P)}^2 = \vec{V}_{(P)} . \vec{V}_{(P)}$  est un scalaire
- L'énergie cinétique est un **SCALAIRE**, unité (W.s).

**22- Energies cinétique de translation et de rotation**

Soient:

(T<sub>0</sub>) un repère fixe (O, x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>)

(T<sub>s</sub>) un repère mobile (G, x<sub>s</sub>, y<sub>s</sub>, z<sub>s</sub>) lié au solide (S) (G représente le centre de gravité de (S).)

Dans ce cas, on peut écrire d'après la formule de transport des vitesses de deux points d'un même solide:

- $\vec{V}_{(P)} = \vec{V}_{(G)} + \vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}$ , d'où:

$$\vec{V}_{(P)}^2 = \vec{V}_{(G)}^2 + 2.\vec{V}_{(G)}.(\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}) + (\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P})^2 = \vec{V}_{(G)}^2 + 2.\vec{V}_{(G)}.(\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}) + (\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}).(\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P})$$

d'après la propriété des produits mixtes:  $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$ , on obtient:

$$\vec{V}_{(P)}^2 = \vec{V}_{(G)}^2 + 2.\vec{V}_{(G)}.(\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P}) + \vec{\Omega}_s.[G\vec{P} \wedge (\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P})]$$

En utilisant les propriétés d'associativité vectorielle et l'invariance de  $\vec{\Omega}_s$  et  $\vec{V}_{(G)}$  par rapport à l'élément d'intégration  $dm$ , on peut écrire:

$$E_C = \frac{1}{2} \int_S \vec{V}_{(P)}^2 . dm = \frac{1}{2} \left\{ \vec{V}_{(G)}^2 . \int_S dm + 2.\vec{V}_{(G)}. \left( \vec{\Omega}_s \wedge \int_S G\vec{P} dm \right) + \vec{\Omega}_s . \int_S [G\vec{P} \wedge (\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P})] dm \right\}$$

On a de plus:

- $\int_S dm = M$

- $\int_S G\vec{P} dm = \vec{0}$  par définition du centre de gravité G du solide (S)

- $\int_S [G\vec{P} \wedge (\vec{\Omega}_s \wedge G\vec{P})] dm = [I_{(G, S, bs)}].[\vec{\Omega}_s] = \vec{\sigma}_{(G)}$  suivant le calcul du terme (4) effectué au

paragraphe 122-b

D'où, en définitive:

$$E_C = \frac{1}{2} M . \vec{V}_{(G)}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_s . \vec{\sigma}_{(G)}$$

- $\frac{1}{2} M . \vec{V}_{(G)}^2$  correspond à l'énergie cinétique du solide en concentrant toute sa masse au centre d'inertie G, se déplaçant comme un point matériel par une translation rectiligne ou circulaire: c'est **l'énergie cinétique de translation**.

- $\frac{1}{2} \vec{\Omega}_s . \vec{\sigma}_{(G)}$  correspond à l'énergie cinétique qu'on obtiendrait si G était fixe. On peut aussi dire que c'est l'énergie cinétique due à la rotation autour du point G: c'est **l'énergie cinétique de rotation**.

#### Remarques:

- Si on a un mouvement autour d'un point fixe O on obtient:  $E_C = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_s . \vec{\sigma}_{(O)}$

- Si on a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe passant par O; Oz par exemple:

$$E_C = \frac{1}{2} . I_{Oz} . \omega^2 \text{ avec } \omega \text{ vitesse de rotation autour de l'axe Oz } (\vec{\Omega}_s = \omega . \vec{z})$$

## CHAP. 7: DYNAMIQUE

### 1- TORSEUR DYNAMIQUE

#### 11- Définitions

##### 111- Solides Ponctuels

Le torseur dynamique en un point A se définit par la donnée de deux vecteurs:

- La résultante dynamique:  $\vec{R}(\gamma) = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i \cdot \vec{\gamma}_{(P_i)})$
- Le moment dynamique au point A:  $\vec{M}(\gamma, A) = \vec{\delta}_{(A)} = \sum_{i=1}^{i=n} (A\vec{P}_i \wedge m_i \cdot \vec{\gamma}_{(P_i)})$

##### 112- Corps matériels homogènes

De même, pour les corps matériels homogènes, on aura:

- La résultante dynamique:  $\vec{R}(\gamma) = \int_S \vec{\gamma}_{(P)} \cdot dm$
- Le moment dynamique au point A:  $\vec{\delta}_{(A)} = \int_S (A\vec{P} \wedge \vec{\gamma}_{(P)}) \cdot dm$

**Remarque:**

- L'accélération dépend du repère de référence choisi et donc le torseur dynamique dépend également du repère de référence choisi.

### 12- Expression du torseur dynamique d'un système

#### 121- Résultante dynamique

$$\vec{R}(\gamma) = \int_S \vec{\gamma}_{(P)} \cdot dm = \int_S \left( \frac{d^2 O\vec{P}}{dt^2} \right) \cdot dm = \frac{d^2}{dt^2} \left( \int_S O\vec{P} \cdot dm \right) = \frac{d^2}{dt^2} [M \cdot O\vec{G}] = M \cdot \frac{d^2}{dt^2} [O\vec{G}] = M \cdot \vec{\gamma}_{(G)}$$

d'où:  $\vec{R}(\gamma) = M \cdot \vec{\gamma}_{(G)}$

#### 122- Moment dynamique

##### a- Relation entre $\vec{\sigma}_{(A)}$ et $\vec{\delta}_{(A)}$

- $\vec{\sigma}_{(A)} = \int_S A\vec{P} \wedge \vec{V}_{(P)} \cdot dm$
- $\vec{\delta}_{(A)} = \int_S A\vec{P} \wedge \vec{\gamma}_{(P)} \cdot dm$

Calculons la dérivée du moment cinétique en A:

$$\bullet \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{(A)}] = \frac{d}{dt} \left[ \int_S A\vec{P} \wedge \vec{V}_{(P)} \cdot dm \right] = \int_S \left( \frac{d}{dt} [A\vec{P} \wedge \vec{V}_{(P)}] \right) \cdot dm \quad \text{car } dm \text{ et } dt \text{ sont indépendants}$$

$$= \int_S \frac{d(A\vec{P})}{dt} \wedge \vec{V}_{(P)} \cdot dm + \int_S A\vec{P} \wedge \frac{d(\vec{V}_{(P)})}{dt} \cdot dm \quad \text{dérivation d'un produit}$$

$$\text{or } \frac{d(A\vec{P})}{dt} = \frac{d(A\vec{O} + O\vec{P})}{dt} = -\frac{d(O\vec{A})}{dt} + \frac{d(O\vec{P})}{dt} = -\vec{V}_{(A)} + \vec{V}_{(P)} = \vec{V}_{(P)} - \vec{V}_{(A)}$$

$$\frac{d[\vec{\sigma}_{(A)}]}{dt} = \underbrace{\int_S \vec{V}_{(P)} \wedge \vec{V}_{(P)} \cdot dm}_{\vec{0}} - \int_S \vec{V}_{(A)} \wedge \vec{V}_{(P)} \cdot dm + \underbrace{\int_S A\vec{P} \wedge \vec{\gamma}_{(P)} \cdot dm}_{\vec{\delta}_{(A)}}$$

soit,  $\vec{V}_{(A)}$  étant indépendant de  $dm$

$$= -\vec{V}_{(A)} \wedge \underbrace{\int_S \vec{V}_{(P)} \cdot dm}_{\vec{R}(V)} + \vec{\delta}_{(A)} = -\vec{V}_{(A)} \wedge M \cdot \vec{V}_{(G)} + \vec{\delta}_{(A)} = \vec{\delta}_{(A)} - M \cdot \vec{V}_{(A)} \wedge \vec{V}_{(G)}$$

d'où: 
$$\vec{\delta}_{(A)} = \frac{d[\vec{\sigma}_{(A)}]}{dt} + M \cdot \vec{V}_{(A)} \wedge \vec{V}_{(G)}$$

• **Attention à ne pas confondre cette relation avec une relation de transport d'un moment de torseur.**

**Remarques:** On peut écrire  $\vec{\delta}_{(A)} = \frac{d[\vec{\sigma}_{(A)}]}{dt}$  lorsque:

- A est un point fixe
- G est un point fixe
- A est confondu avec G
- $\vec{V}_{(A)}$  et  $\vec{V}_{(G)}$  sont équipollents

*b- Formule de transport*

Le torseur dynamique obéit aux mêmes règles que les autres torseurs et donc:

$$\vec{\delta}_{(B)} = \vec{\delta}_{(A)} + M \cdot \vec{\gamma}_{(G)} \wedge \vec{AB}$$

quelques soient les points A et B.

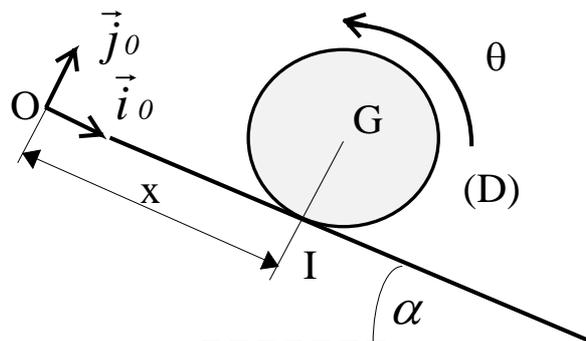
## 2- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

### 21- Enoncé

Le **principe fondamental de la dynamique (PFD)** indique qu'à chaque instant, le torseur des actions extérieures s'appliquant à un système est équivalent au torseur dynamique de ce système. C'est à dire, en un point quelconque A, nous avons:

- Pour les résultantes:  $\vec{R}_{\vec{F}_e} = \vec{R}(\gamma)$
- Pour les moments au point A:  $\vec{M}_{\vec{F}_e(A)} = \vec{\delta}_{(A)}$

### 22- Exemple: Disque roulant sur un plan incliné



### 221 Calcul du torseur dynamique du disque D

- $O\vec{G} = x.\vec{i}_0 + R.\vec{j}_0$

- $\vec{\gamma}_{(G)} = \frac{d^2 O\vec{G}}{dt^2} = \ddot{x}.\vec{i}_0$  d'où on en déduit:  $\vec{R}(\gamma) = M.\vec{\gamma}_{(G)} = M.\ddot{x}.\vec{i}_0$

- $\vec{\delta}_{(G)} = \frac{d(\vec{\sigma}_{(G)})}{dt}$  or  $\vec{\sigma}_{(G)} = H_{(G,D,b0)}.\vec{\Omega}_D = \begin{bmatrix} \frac{M.R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M.R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M.R^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{M.R^2}{2}.\dot{\theta}.\vec{k}_0$

d'où:

$$\vec{\delta}_{(G)} = \frac{M.R^2}{2}.\ddot{\theta}.\vec{k}_0$$

Soit l'expression du torseur dynamique de D:

- $\vec{R}(\gamma) = M.\ddot{x}.\vec{i}_0$
- $\vec{\delta}_{(G)} = \frac{M.R^2}{2}.\ddot{\theta}.\vec{k}_0$

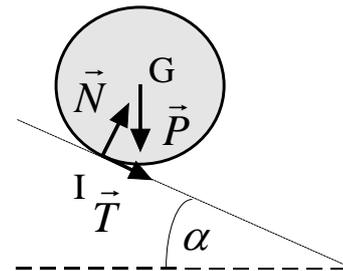
### 222- Bilan des actions extérieures sur le solide

- Pesanteur  $\begin{cases} \vec{R}_P = +M.g.(\sin \alpha.\vec{i}_0 - \cos \alpha.\vec{j}_0) \\ \vec{M}_{\vec{P}(G)} = \vec{0} \end{cases}$

- Action de contact avec le sol  $\begin{cases} \vec{R}_A = T.\vec{i}_0 + N.\vec{j}_0 \\ \vec{M}_{\vec{R}_A(I)} = \vec{0} \end{cases}$

$$\vec{M}_{\vec{R}_A(G)} = \vec{M}_{\vec{R}_A(I)} + \vec{R}_A \wedge I\vec{G} = (T.\vec{i}_0 + N.\vec{j}_0) \wedge R.\vec{j}_0 = T.R.\vec{k}_0$$

Soit en définitive:



- $\vec{R}_{\vec{F}_e} = (T + M.g.\sin \alpha).\vec{i}_0 + (N - M.g.\cos \alpha).\vec{j}_0$
- $\vec{M}_{\vec{F}_e(G)} = T.R.\vec{k}_0$

### 223 Principe Fondamental de la dynamique

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au point G:

$$\begin{cases} \vec{R}_{\vec{F}_e} = \vec{R}(\gamma) \\ \vec{M}_{\vec{F}_e(G)} = \vec{\delta}_{(G)} \end{cases} \text{ on obtient: } \begin{cases} T + M.g.\sin \alpha = M.\ddot{x} \\ N - M.g.\cos \alpha = 0 \\ T.R = \frac{1}{2}.M.R^2.\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\text{Ou encore: } \begin{cases} T - M.\ddot{x} = -M.g.\sin \alpha \\ N = M.g.\cos \alpha \\ T - \frac{1}{2}.M.R.\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Nous sommes en présence d'un système de trois équations à quatre inconnues ( $T, N, x, \theta$ ). Pour le résoudre, il nous faut une équation supplémentaire que l'on va obtenir en examinant les **conditions de roulement au point de contact I** entre le disque et le plan incliné.

## 224 Hypothèse de roulement sans glissement

### a- Equation supplémentaire

Si on fait l'hypothèse qu'il y a roulement sans glissement du disque (D) sur le plan (P), alors la vitesse de glissement de (D) sur (P) est nulle. Soit:

$$\vec{U}_{DP} = \vec{V}_{(D)} - \vec{V}_{(P)} = \vec{0}$$

- $\vec{V}_{(P)} = \vec{0}$  le plan étant fixe
- $\vec{V}_{(D)} = \vec{V}_{(G)} + \vec{\Omega}_D \wedge G\vec{I}_D = \dot{x} \cdot \vec{i}_0 + \dot{\theta} \cdot \vec{k}_0 \wedge (-R \cdot \vec{j}_0) = (\dot{x} + R \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{i}_0$

La condition de roulement sans glissement nous fournit l'équation:

$$\dot{x} + R \cdot \dot{\theta} = 0$$

soit en dérivant par rapport au temps:

$$\ddot{x} + R \cdot \ddot{\theta} = 0$$

on résout alors le système: 
$$\begin{cases} T - M \cdot \ddot{x} = -M \cdot g \cdot \sin \alpha \\ N = M \cdot g \cdot \cos \alpha \\ T - \frac{1}{2} \cdot M \cdot R \cdot \ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{x} + R \cdot \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

on obtient après résolution:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin \alpha \\ \ddot{\theta} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{g \cdot \sin \alpha}{R} \\ T = -\frac{M \cdot g \cdot \sin \alpha}{3} \\ N = M \cdot g \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

### b- Vérification à effectuer

Il faut cependant vérifier:

- $N > 0$  traduisant l'existence du contact en I

soit  $M \cdot g \cdot \cos \alpha > 0$  et donc  $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$

- $\|\vec{T}\| < f \cdot \|\vec{N}\|$  soit  $\frac{M \cdot g \cdot \sin \alpha}{3} < f \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha$  et donc  $f > \frac{\tan \alpha}{3}$

## 225 Hypothèse de glissement

Dans le cas où il y a roulement avec glissement on a l'équation:

$$\|\vec{T}\| = f \cdot \|\vec{N}\| \text{ soit en définitive } T = \pm f \cdot N \text{ Il faut étudier les deux cas possibles.}$$

### a- Première équation supplémentaire possible: $T = +f \cdot N$

Supposons dans un premier temps que  $T = +f \cdot N$

Il faut alors résoudre le système:

$$\begin{cases} T - M \cdot \ddot{x} = -M \cdot g \cdot \sin \alpha \\ N = M \cdot g \cdot \cos \alpha \\ T - \frac{1}{2} \cdot M \cdot R \cdot \ddot{\theta} = 0 \\ T - f \cdot N = 0 \end{cases}$$

soit après résolution:

$$\begin{cases} \ddot{x} = g.(\sin \alpha + f. \cos \alpha) \\ \ddot{\theta} = 2. \frac{f. g. \cos \alpha}{R} \\ N = M. g. \cos \alpha \\ T = f. M. g. \cos \alpha \end{cases}$$

b- Vérifications à effectuer

il est cependant nécessaire de vérifier les conditions suivantes:

- $N > 0$  traduction de l'existence du contact en l

soit  $M. g. \cos \alpha > 0$  et donc  $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$

- $\vec{T} \wedge \vec{U}_{DP} = \vec{0}$  ce qui est immédiat puisque  $\vec{T}$  et  $\vec{U}_{DP}$  sont portés par le même vecteur  $\vec{i}_0$

- $\vec{T} \cdot \vec{U}_{DP} < 0$  soit  $f. M. g. \cos \alpha. \left[ g.t.(\sin \alpha + f. \cos \alpha) + R. \frac{2.f. g. t. \cos \alpha}{R} \right] < 0$

soit après simplification:  $f < -\frac{\tan \alpha}{3}$  ce qui est **impossible** car  $f$  est strictement positif

L'équation supplémentaire  $T = +f.N$  nous amène donc à une impossibilité physique; c'est par conséquent l'autre équation qui est correcte.

c- Autre équation possible:  $T = -f.N$

Il faut dans ce cas résoudre le système:

$$\begin{cases} T - M.\ddot{x} = -M.g.\sin \alpha \\ N = M.g.\cos \alpha \\ T - \frac{1}{2}.M.R.\ddot{\theta} = 0 \\ T + f.N = 0 \end{cases}$$

on obtient:

$$\begin{cases} \ddot{x} = g.(\sin \alpha - f. \cos \alpha) \\ \ddot{\theta} = -2. \frac{f. g. \cos \alpha}{R} \\ N = M. g. \cos \alpha \\ T = -f. M. g. \cos \alpha \end{cases}$$

d- Vérifications à effectuer

il faut toujours vérifier les conditions suivantes:

- $N > 0$  soit  $M. g. \cos \alpha > 0$  et donc  $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$

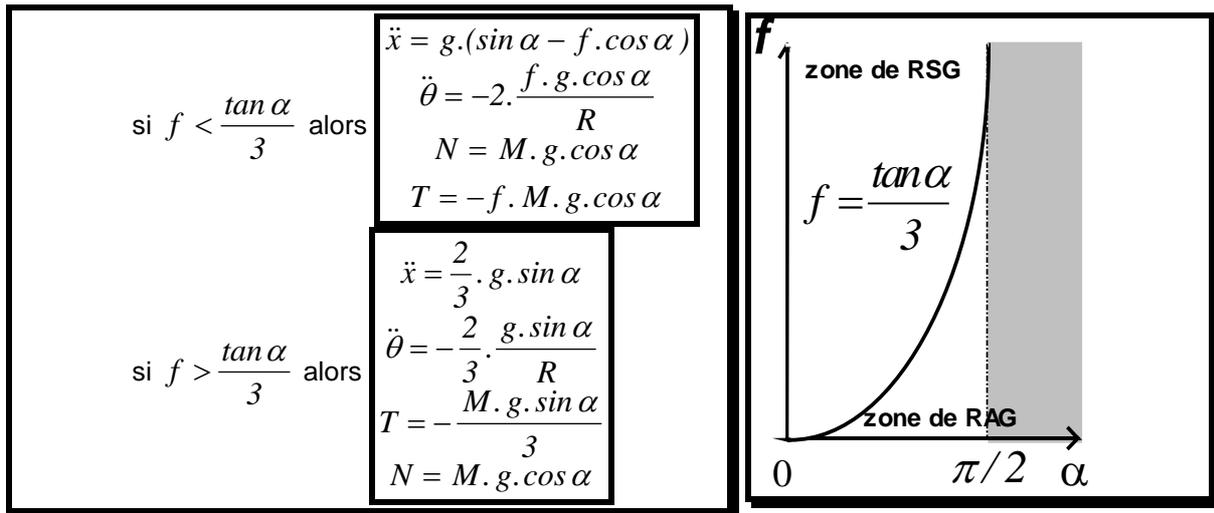
- $\vec{T} \wedge \vec{U}_{DP} = \vec{0}$  ce qui est immédiat puisque  $\vec{T}$  et  $\vec{U}_{DP}$  sont tous deux portés par le vecteur  $\vec{i}_0$

- $\vec{T} \cdot \vec{U}_{DP} < 0$  soit  $-f. M. g. \cos \alpha. \left[ g.t.(\sin \alpha - f. \cos \alpha) - R. \frac{2.f. g. t. \cos \alpha}{R} \right] < 0$

soit après simplification:  $f < \frac{\tan \alpha}{3}$

Nous pouvons remarquer que cette condition est complémentaire de celle trouvée dans l'hypothèse du roulement sans glissement.

En définitive la solution de ce problème varie suivant les valeurs respectives de  $f$  et  $\alpha$



### 3- TRAVAIL ET ENERGIE

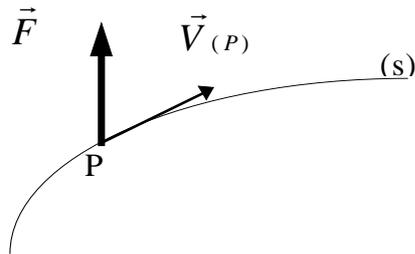
#### 31-Travail et puissance

##### 311 Définitions

Soit un point se déplaçant sur sa trajectoire (s). Appelons  $\vec{V}_{(P)}$  la vitesse du point P, tangente à la trajectoire et  $\vec{F}$  une force appliquée en P.

La **puissance instantanée** correspondant à  $\vec{F}$  s'écrit:

$$\mathbf{P = \vec{F} \cdot \vec{V}_{(P)}}$$



La puissance étant également définie comme un travail par unité de temps, on en déduit:

$$\mathbf{P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}_{(P)}}$$

d'où la définition du **travail**:

$$\mathbf{W = \int (\vec{F} \cdot \vec{V}_{(P)}) \cdot dt}$$

##### **Remarque:**

- Puissance et travail sont des SCALAIRES

##### 312 Travail d'une force appliquée en un point quelconque d'un solide (S)

On a  $W = \int \vec{F} \cdot \vec{V}_{(P)} \cdot dt$

or  $\vec{V}_{(P)} = \vec{V}_{(G)} + \vec{\Omega}_S \wedge \vec{GP}$

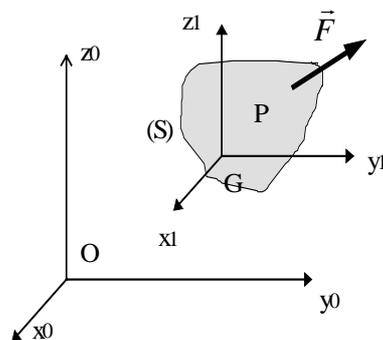
d'où:  $W = \int \vec{F} \cdot \vec{V}_{(G)} \cdot dt + \int \vec{F} \cdot (\vec{\Omega}_S \wedge \vec{GP}) \cdot dt$

soit d'après les propriétés des produits mixtes:

$$= \int \vec{F} \cdot \vec{V}_{(G)} \cdot dt + \int \vec{\Omega}_S \cdot (\vec{GP} \wedge \vec{F}) \cdot dt$$

or  $\vec{GP} \wedge \vec{F} = \vec{M}_{\vec{F}(G)}$

d'où:



$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{V}_{(G)}.dt + \int \vec{\Omega}_S \cdot M_{\vec{F}(G)}.dt$$

Le premier terme représente le **travail de translation** et le second le **travail de rotation** autour de G.

### 313 Cas particuliers

#### a- Translation pure:

$$\vec{\Omega}_S = \vec{0} \text{ et donc } \vec{V}_{(P)} = \vec{V}_{(G)}$$

Si de plus  $\vec{F}$  est indépendant du temps:

$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{V}_{(G)}.dt = \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d\vec{OG}}{dt} \right).dt = \vec{F} \cdot G_1 G_2 \text{ avec } G_1 \text{ et } G_2 \text{ représentant respectivement les}$$

positions de G aux instant  $t_1$  et  $t_2$ .

#### b- Rotation autour d'un point fixe O du système (S):

$$\vec{V}_{(P)} = \vec{\Omega}_S \wedge \vec{OP}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{V}_{(P)}.dt = \int \vec{F} \cdot (\vec{\Omega}_S \wedge \vec{OP}).dt = \int \vec{\Omega}_S \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{F}).dt = \int \vec{\Omega}_S \cdot M_{\vec{F}(O)}.dt$$

## 32- Energie potentielle d'un système

### 321 Définition

Le calcul de l'expression du travail n'est pas toujours possible, en particulier lorsque le travail dépend de la trajectoire suivie pour passer d'un état initial à un état final, ou dans le cas du glissement.

Lorsque le travail dépend uniquement des positions initiales et finales, on dit que **les forces** correspondantes **dérivent d'un potentiel** et que le travail  $W$  est égal à l'opposée de la variation de **l'énergie potentielle**  $E_p$ :

$$W = -\Delta E_p$$

$$E_p = -\int dW = -\int \vec{F} \cdot \vec{V}_{(P)}.dt$$

### 322 Exemples

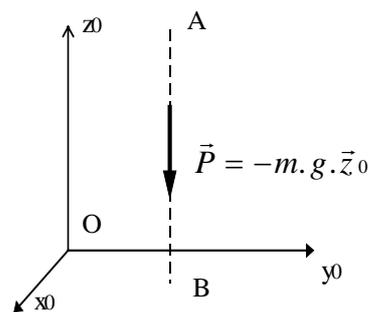
#### a- Pesanteur

$$\vec{F}_{(T0)} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{cases} \text{ et } \vec{V}_{(P)(T0)} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{V}_{(P)}.dt = -\int mg \cdot dz = -m \cdot g \cdot \int_A^B dz$$

$$W = m \cdot g \cdot (z_A - z_B)$$

$$E_p = m \cdot g \cdot z + cste$$

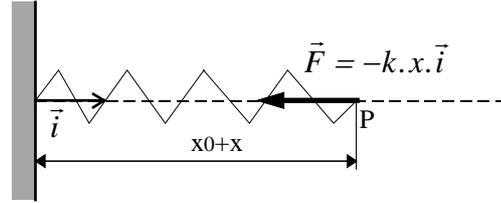


b- Ressort

Pour un ressort linéaire de raideur k:

$$\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i} \text{ et } \vec{V}_{(P)} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{V}_{(P)} \cdot dt = -k \int_A^B x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x^2_A - x^2_B)$$



$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + cste$$

De même pour un ressort de torsion de constante c, on obtient:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \theta^2 + cste$$

**33- Principe de conservation de l'énergie**

331 Hypothèse et énoncé

**Hypothèse:** Les forces extérieures agissant sur le système dérivent d'un potentiel; c'est à dire que l'énergie potentielle peut être calculée.

Soit un solide (S) soumis uniquement à une force  $\vec{F}$  au point P. Le travail élémentaire  $dW$  peut s'écrire:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{V}_{(G)} \cdot dt + \vec{\Omega}_S \cdot M_{\vec{F}(G)} \cdot dt$$

D'après le principe fondamental de la dynamique:

$$\bullet \vec{F} = M \cdot \vec{\gamma}_{(G)} = M \cdot \frac{d(\vec{V}_{(G)})}{dt}$$

$$\bullet M_{\vec{F}(G)} = \vec{\delta}_{(G)} = \frac{d(\vec{\sigma}_{(G)})}{dt} = \frac{d(\Pi_{(G,S)} \cdot \vec{\Omega}_S)}{dt} = I_{(G,S)} \cdot \frac{d(\vec{\Omega}_S)}{dt}$$

on introduit ces expressions dans l'écriture de  $dW$ , on obtient:

$$dW = M \cdot \vec{V}_{(G)} \cdot d\vec{V}_{(G)} + \vec{\Omega}_S \cdot \Pi_{(G,S)} \cdot d(\vec{\Omega}_S) = M \cdot \vec{V}_{(G)} \cdot d\vec{V}_{(G)} + \Pi_{(G,S)} \cdot \vec{\Omega}_S \cdot d(\vec{\Omega}_S)$$

$$\text{or } dW = -dE_p$$

Le premier terme  $M \cdot \vec{V}_{(G)} \cdot d\vec{V}_{(G)}$  représente  $dE_c$  **de translation** et le second terme  $\Pi_{(G,S)} \cdot \vec{\Omega}_S \cdot d(\vec{\Omega}_S)$  représente  $dE_c$  **de rotation**.

d'où:

$$-dE_p = dE_c$$

On en déduit le **principe de conservation de l'énergie (mécanique):**

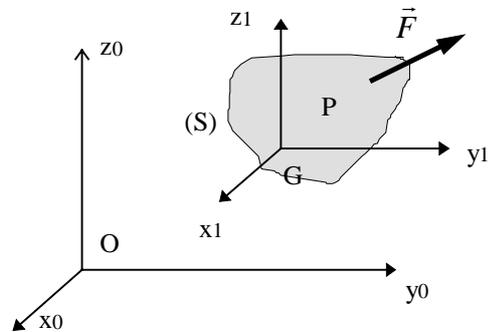
$$E_p + E_c = cste$$

332 Exemple

Reprenons l'exemple du disque qui roule sur un plan incliné avec l'hypothèse du roulement sans glissement; soit:  $\dot{x} + R \cdot \dot{\theta} = 0$

Dans ce cas, les hypothèses du théorème de conservation de l'énergie sont vérifiées. On peut montrer que le travail des forces de contact est nul.

$$\bullet E_c = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot R^2}{2} \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} \cdot M \cdot \dot{x}^2$$



- $E_p = -M \cdot g \cdot z_G + cste = -M \cdot g \cdot x \cdot \sin \alpha + cste$

En utilisant  $E_p + E_c = cste$ , on obtient:

$$\frac{3}{4} \cdot M \cdot \dot{x}^2 - M \cdot g \cdot x \cdot \sin \alpha = cste$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient:

$$\frac{3}{2} \cdot M \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} - M \cdot g \cdot \dot{x} \cdot \sin \alpha = 0$$

soit si  $\dot{x} \neq 0$ :

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin \alpha$$

**Remarques:**

- Dans le cas du roulement avec glissement, le travail des forces de frottement est inconnu, on ne peut donc pas calculer l'énergie potentielle. Le principe de conservation de l'énergie (mécanique) ne s'applique pas.

- Le principe de conservation de l'énergie mécanique découle du principe fondamental de la dynamique et donc, il n'apporte pas une nouvelle équation supplémentaire. Par contre il permet d'obtenir directement une équation régissant le mouvement du système étudié, sans s'occuper des efforts appliqués au système.

## BIBLIOGRAPHIE

### Niveau bac:

- **FANCHON** « *Mécanique – Premières F* », , Nathan Technique, 1985
- **FANCHON** « *Mécanique – Terminales F* », , Nathan Technique, 1985
- **FANCHON** « *Mécanique – 1<sup>ères</sup> et T<sup>erm</sup> STI* », , Nathan Technique, 1996

### Niveau bac+1 ou 2:

- **FANCHON** « *Guide de Mécanique- Sciences et technologies industrielles* », Nathan, pp.1-264, 1996
- **BONE, MOREL, BOUCHER** « *Mécanique générale -Cours et applications* », Dunod Université, 1984.
- **BERTIN, FAROUX, RENAULT** « *Cours de Physique – Mécanique* », Dunod université, 1989.
- **AGATI, BREMONT, DELVILLE**, « *Mécanique du solide - Applications industrielles* »

# SOMMAIRE

|  |       |
|--|-------|
| <b>PRESENTATION</b>  | p. 1  |
| <b>OBJECTIFS ET PROGRAMME DE MECANIQUE DU SOLIDE 3<sup>e</sup> ANNEE</b> | p. 2  |
| <b>Chap.1: RAPPELS DE CALCULS</b>  | p. 3  |
| 1- Vecteurs  |       |
| 2- Opérations sur les vecteurs   |       |
| 21- Produit Scalaire   |       |
| 22- Produit Vectoriel  | p. 4  |
| 23- Produit Mixte  | p. 5  |
| 3- Notions sur les torseurs  |       |
| 31- Définition   |       |
| 32- Application des torseurs à la représentation d'un champ de force     |       |
| 4- Changements de bases  | p. 6  |
| 41- Projection des vecteurs de bases                                     |       |
| 42- Changements de bases d'un vecteur quelconque                         |       |
| 5- Relations de trigonométrie  | p. 7  |
| <b>Chap. 2: STATIQUE</b>   | p. 8  |
| 1- Solides et systèmes matériels   |       |
| 2- Actions mécaniques  |       |
| 21- Actions mécaniques à distance  |       |
| 22- Actions mécaniques de contact  |       |
| 221- Charge concentrée   |       |
| 222- Charge linéaire   |       |
| 223- Charge surfacique   | p. 9  |
| 23- Actions mécaniques exercées sur des liaisons usuelles parfaites      |       |
| 3- Principe de la statique   |       |
| 31- Enoncé   |       |
| 32- Principe des actions mutuelles                                       | p. 12 |
| 4- Méthodes de résolution  |       |
| 41- Organigramme de la méthode   |       |
| 42- Cas Particuliers   | p. 13 |
| 421- Solides soumis à deux forces extérieures                            |       |
| 422- Solides soumis à trois forces extérieures non parallèles            |       |
| 423- Solides soumis à l'action d'au moins quatre forces extérieures      |       |
| 5- Statique graphique  |       |
| 51- Détermination graphique de la résultante d'un système de forces.     |       |
| 52- Equilibre d'un système matériel                                      | p. 15 |
| 521- Equilibre d'un système matériel soumis à des forces parallèles      |       |
| 522- Equilibre d'un système matériel soumis à des forces concourantes    | p. 16 |
| <b>Chap.3: ADHERENCE - FROTTEMENT</b>                                    | p. 19 |
| 1- Constatations   |       |
| 2- Coefficients et angles de frottement                                  |       |
| 21- Définitions  |       |
| 22- Exemples de valeurs des coefficients de frottement                   | p. 20 |

|  |       |
|--|-------|
| 3- Lois du frottement - Lois de Coulomb                    |       |
| 4- Effort normal - Effort tangentiel                       | p. 21 |
| 5- Application de l'adhérence au phénomène d'arc-boutement |       |

**Chap. 4: CINEMATIQUE** p. 23

|  |       |
|--|-------|
| 1- Positionnement d'un point ou d'un solide  |       |
| 11- Position d'un point  |       |
| 12- Position d'un solide   |       |
| 2- notion de mouvement et de repos - repères absolu et relatif - repères de référence et de projection |       |
| 21- Mouvement d'entraînement de translation  | p. 24 |
| 22- Mouvement d'entraînement de translation circulaire   |       |
| 22- Mouvement d'entraînement de rotation   |       |
| 3- cinématique du point  | p. 25 |
| 31- Définitions générales  |       |
| 311- Trajectoire:  |       |
| 312- Vitesses et accélérations d'un point:   |       |
| 32- Expressions analytiques de la vitesse et de l'accélération d'un point                              |       |
| 321- Coordonnées cartésiennes  |       |
| 322- Application à la dérivation d'un vecteur mobile   | p. 26 |
| 323- Coordonnées cylindriques  |       |
| 33- Dissociation des paramètres  | p. 27 |
| 4- Cinématique du solide   | p. 28 |
| 41- Calcul des vitesses  | p. 41 |
| 42- Cas où P est fixe dans (T1): Transport de vitesses   |       |
| 43- Calcul des accélérations   | p. 30 |
| 431- Expression vectorielle de l'accélération de CORIOLIS  |       |
| 432- Cas où l'accélération de CORIOLIS est nulle   | p. 31 |
| 44- Vitesse de glissement - Condition de roulement sans glissement                                     |       |

**Chap. 5: GEOMETRIE DES MASSES** p. 32

|   |       |
|---|-------|
| 1- Centre de gravité  |       |
| 11- Systèmes de solides ponctuels                             |       |
| 12- Corps matériels homogènes                                 |       |
| 121- Définitions générales                                    |       |
| 122- Simplifications éventuelles                              | p. 33 |
| 123- Méthodes de calcul                                       |       |
| 2- Moments d'inertie et produits d'inertie                    | p. 35 |
| 21- Systèmes de solides ponctuels                             |       |
| 22- Corps matériels homogènes                                 |       |
| 23- Matrice d'inertie   | p. 36 |
| 24- Transport des moments et produits d'inertie               | p. 37 |
| 241- Axes parallèles aux axes de bases et passant par G       |       |
| 242- Axes quelconque passant par O, sommet du trièdre de base | p. 38 |
| 25- Formulaires   | p. 39 |

**Chap. 6: CINETIQUE** p. 41

|  |  |
|--|--|
| 1- Torseur cinétique                             |  |
| 11- Définitions                                  |  |
| 111- Solides Ponctuels                           |  |
| 112- Corps matériels homogènes                   |  |
| 12- Expression du torseur cinétique d'un système |  |
| 121- Résultante cinétique                        |  |
| 122- Moment cinétique                            |  |

|  |       |
|--|-------|
| 2- Energie cinétique   | p. 43 |
| 21- Définition   | p.43  |
| 211- Solides ponctuels   |       |
| 212- Corps matériels homogènes   |       |
| 22- Energies cinétique de translation et de rotation                     |       |
| <b>Chap.7: DYNAMIQUE</b>   | p. 45 |
| 1- Torseur dynamique   |       |
| 11- Définitions  |       |
| 111- Solides Ponctuels   |       |
| 112- Corps matériels homogènes   |       |
| 2- Principe fondamental de la dynamique                                  |       |
| 21- Enoncé   | p. 46 |
| 22- Exemple: Disque roulant sur un plan incliné                          |       |
| 221 Calcul du torseur dynamique du disque D                              | p. 47 |
| 222- Bilan des actions extérieures sur le solide                         |       |
| 223 Principe Fondamental de la dynamique                                 |       |
| 224 Hypothèse de roulement sans glissement                               | p. 48 |
| 225 Hypothèse de glissement  |       |
| 3- Travail et énergie  | p. 50 |
| 31-Travail et puissance  |       |
| 311 Définitions  |       |
| 312 Travail d'une force appliquée en un point quelconque d'un solide (S) |       |
| 313 Cas particuliers   | p. 51 |
| 32- Energie potentielle d'un système                                     |       |
| 321 Définition   |       |
| 322 Exemples   | p. 52 |
| 33- Principe de conservation de l'énergie                                |       |
| 331 Hypothèse et énoncé  |       |
| 332 Exemple  |       |