Table des matières

Chapitre 1

Description du mouvement d'un point matériel

La mécanique est la partie de la physique qui étudie les mouvement des corps en tenant compte des causes.
Dans notre programme on s'interesse à la mécanique classique (ou Newtonnienne) qui s'interesse aux mouvements des corps ayant une vitesse très faible devant celle de la lumière .
On postule que :

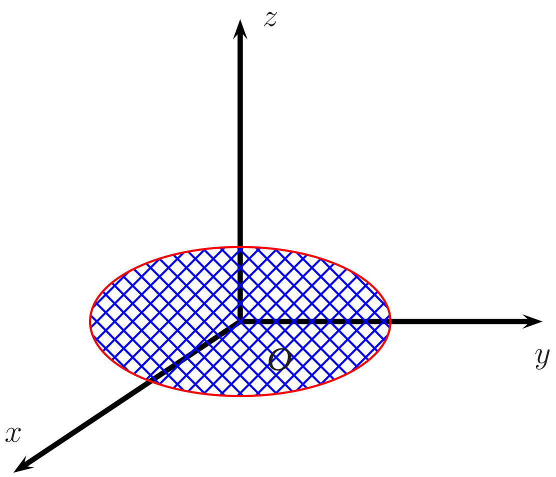
- *Le temps est absolu : c'est à dire que le temps ne dépend pas du référentiel*
- *L'existence des référentiels galiléens.*
- *La trajectoire est déterministe.*

1.1 Repères d'espace et du temps. Référentiel

1.1.1 Repérage dans l'espace

Pour se repérer dans l'espace ,il faut choisir un corps ***solide*** *de référence S auquel on attache des axes de coordonnées Ox, Oy, Oz ;O étant l'origine des axes.*
L'ensemble de tous les systèmes d'axes de coordonnées liées à un même solide de référence constitue le repère lié à S.

Remarque- 1 *:*
Dans notre cours de mécanique ,on utilise toujours des ***repères orthonormés***



- $\| \overrightarrow{e_x} \| = \| \overrightarrow{e_y} \| = \| \overrightarrow{e_z} \| = 1$
- $\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_z} = 0$
- *$\mathcal{R}$est direct, en effet :*

$$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z} \quad ; \quad \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x} \quad ; \quad \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y}$$

1.1.2 Repérage dans le temps

• *La mesure du temps suppose une orientation conventionnel du temps : du passé vers le futur , du à l'irréversibilité de l'évolution.*

• *Le temps se mesure à l'aide d'une horloge, son unité est la seconde depuis 1967.*

• *Le repère du temps est constitué d'un instant considéré comme origine des dates et une unité des temps (la seconde)*

1.1.3 Référentiel

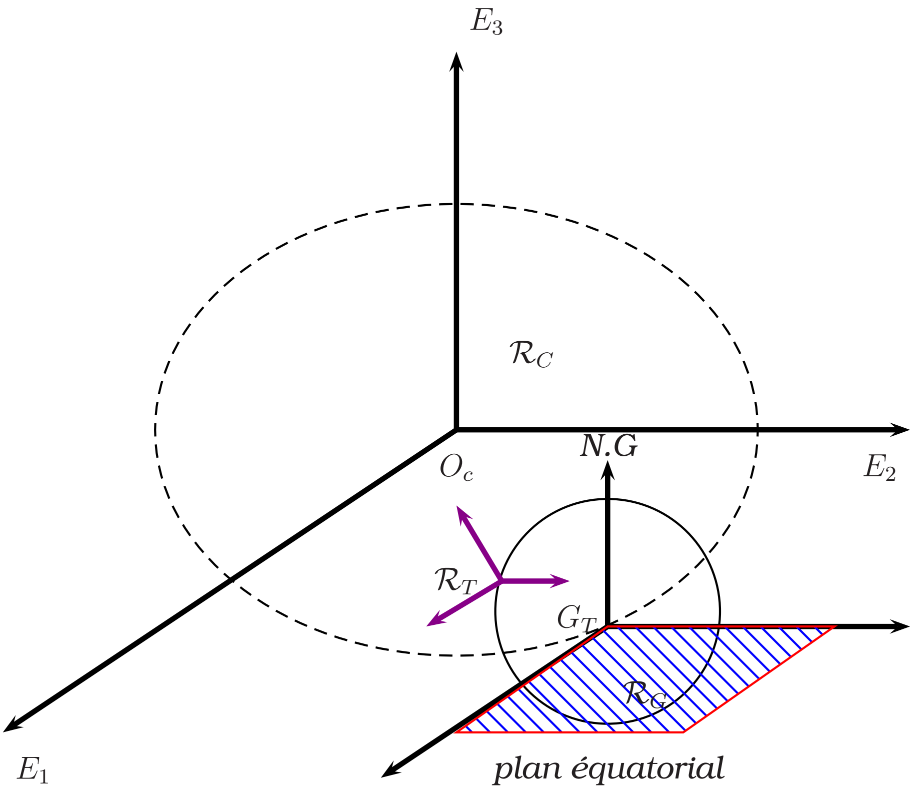
L'ensemble d'un repère spatial lié à un solide de référence S et d'un repère de temps constituent un référentiel $\mathcal{R}$.

Exemple *:*

• *Référentiel de Copérnic $\mathcal{R}_C$:centré au centre du système solaire et les trois axes se dirigent vers des étoiles fixes.*

• *Référentiel Géocentrique $\mathcal{R}_G$:centré au centre de la terre G le plan Gxy forment l'équateur et l'axe Gz se dirige vers nord géographique.*

• *Référentiel terrestre $\mathcal{R}$:centré au point O quelconque et les trois axes se dirigent vers trois directions .*



1.2 Cinématique du point matériel

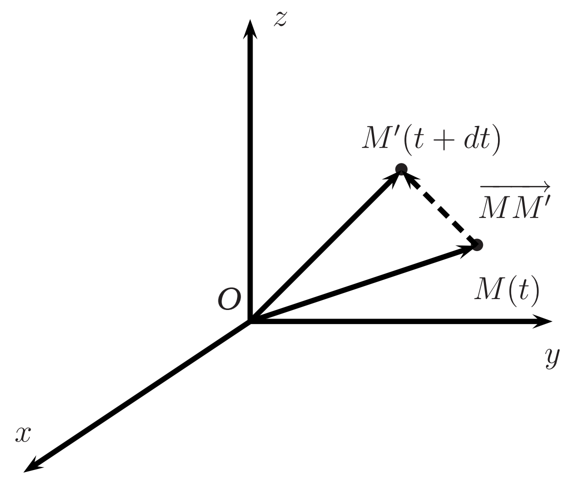
La cinématique est la partie de la mécanique qui s'interesse aux mouvements des corps sans tenir compte des causes (Forces)

1.2.1 Définition du point matériel

On appelle point matériel tout corps solide de dimension négligeable devant une distance caractéristique (longueur d'un pendule ; distance terre-soleil,.....)

1.2.2 Vecteurs position,vitesse et accélération

Soit un référentiel $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ un référentiel et M un point matériel se déplaçant dans $\mathcal{R}$



On appelle :

- $\overrightarrow{OM}$ *: vecteur position*
- $$\boxed{d\overrightarrow{OM} = \lim_{M\to M'} \overrightarrow{MM'} = \lim_{M\to M'} (\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM})}$$

vecteur déplacement élémentaire

- $$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/\mathcal{R}}$$

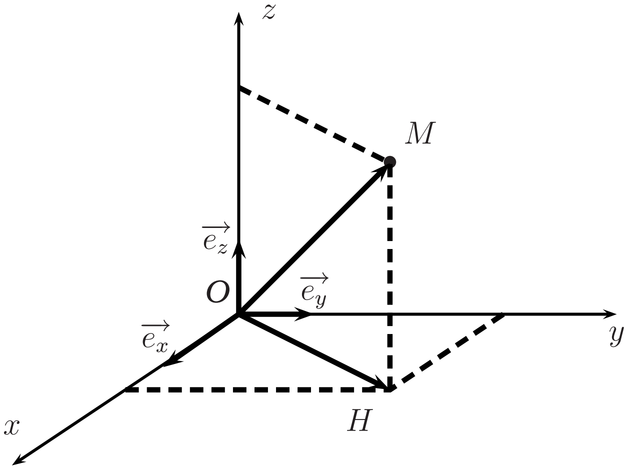
vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ (dériver $d\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{R}$ par rapport au temps en considérant les vecteurs de bases de $\mathcal{R}$ comme des vecteurs constants

- $$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}_{/\mathcal{R}}}$$

accélération du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$

1.2.3 Exemples de bases de projection

1.2.3.1 Coordonnées cartésiennes



1.2.3.1.1 Vecteur déplacement élémentaire :

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} \Longrightarrow$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}}$$

(x, y, z) *représentent les coordonnées cartésiennes du point* M *dans le référentiel* $\mathcal{R}$.
Donc le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ *s'écrit :*

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}}$$

1.2.3.1.2 Vecteur vitesse :

On a $d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z} \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{dx}{dt}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{dy}{dt}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z}$
On pose :

- $\dfrac{dx}{dt} = V_x = \dot{x}$ *: composante de la vitesse sur l'axe des* x
- $\dfrac{dy}{dt} = V_y = \dot{y}$ *: composante de la vitesse sur l'axe des* y
- $\dfrac{dz}{dt} = V_z = \dot{z}$ *: composante de la vitesse sur l'axe des* z

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = V_x\overrightarrow{e_x} + V_y\overrightarrow{e_y} + V_z\overrightarrow{e_z} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}}$$

1.2.3.1.3 Vecteur accélération :

On a : $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ *donc*

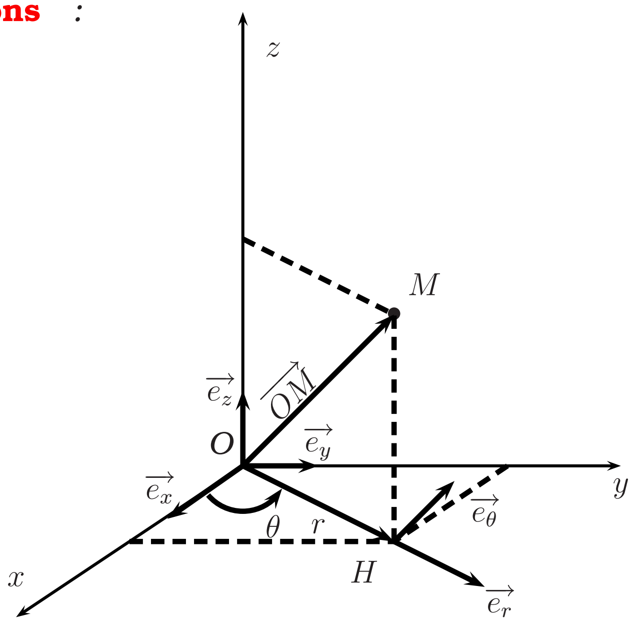
$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = a_x\overrightarrow{e_x} + a_y\overrightarrow{e_y} + a_z\overrightarrow{e_z} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$$

Avec :

– $\dfrac{d^2x}{dt^2} = a_x = \ddot{x}$: *composante de l'accélération sur l'axe des* x
– $\dfrac{d^2y}{dt^2} = a_y = \ddot{y}$: *composante de l'accélération sur l'axe des* y
– $\dfrac{d^2z}{dt^2} = a_z = \ddot{z}$: *composante de l'accélération sur l'axe des* z

1.2.3.2 Coordonnées cylindriques

1.2.3.2.1 Définitions :



Les coordonnées cylindriques sont :

► $r = OH \quad r \geqslant 0$

► $\theta = (\widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OH}}) \in [0, 2\pi]$

► $z \in \mathbb{R}$ *:la côte du point* M.

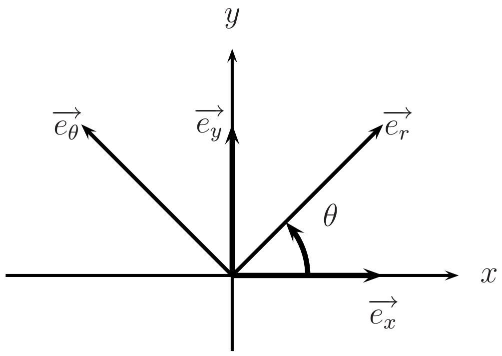
(r, θ, z) *: sont les coordonnées cylindriques.*
On définit le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ *par :*

$$\boxed{\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OH}}{r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y} \in (Oxy)}$$

$\parallel \overrightarrow{e_r} \parallel = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{e_r}$ *est un vecteur unitaire,on tire donc que* $\overrightarrow{OH} = r\overrightarrow{e_r}$ *et par conséquent :*

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}}$$

On définit le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ *par rotation de* $\overrightarrow{e_r}$ *de* $\dfrac{\pi}{2}$ ***dans le sens de*** θ *c'est à dire :*
$\overrightarrow{e_\theta} = \cos(\theta + \pi/2)\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta + \pi/2)\overrightarrow{e_y} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}$



Dérivons $\overrightarrow{e_r}$ par rapport à θ dans le repère $\mathcal{R}$:
$\left.\dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\right._{/\mathcal{R}}$ *: c'est à dire dériver $\overrightarrow{e_r}$ en considérant les vecteurs de bases de $\mathcal{R}(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ comme des vecteurs constants.*

$$\left.\dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\right._{/\mathcal{R}} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_\theta}$$

$$\boxed{\left.\dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\right._{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{e_\theta} \quad ; \quad \left.\dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta}\right._{/\mathcal{R}} = -\overrightarrow{e_r} \quad ; \quad \left.\dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right._{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \quad ; \quad \left.\dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right._{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}}$$

Remarque- 2 :
Dériver un vecteur de module constant dans le repère par rapport à l'angle de rotation θ revient à le faire tourner de $\dfrac{\pi}{2}$ dans le même sens que θ

En effet : soit $\overrightarrow{A}$ un vecteur dont le module est constant c'et à dire $\parallel \overrightarrow{A} \parallel = cte \Longrightarrow \overrightarrow{A}.\overrightarrow{A} = cste$.

Dérivons par rapport à θ ; on trouve $\overrightarrow{A}.\dfrac{d\overrightarrow{A}}{d\theta} = 0$ c'est à dire $\overrightarrow{A}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{A}}{d\theta}$ sont perpendiculaire.

La base$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ est dite base locale en coordonnées cylindriques .
$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ est un trièdre direct

1.2.3.2.2 Vecteur déplacement élémentaire :

On a :$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z} \Longrightarrow d\overrightarrow{OM}_{/R} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\overrightarrow{e_r} + dz\overrightarrow{e_z}$
Or $d\overrightarrow{e_r} = d\theta\overrightarrow{e_\theta}$ *donc*

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}}$$

Formule à connaître

Remarque- 3 :
Si $z = cte (= 0)$ le mouvement est plan (r, θ) : dites coordonnées polaires

1.2.3.2.3 Vecteur vitesse :

On a : $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right._{/\mathcal{R}} \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d}{dt}_{/\mathcal{R}}(dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z})$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}}$$

Remarque- 4 :
Il faut bien faire la différence entre le repère d'étude et celui de projection.

1.2.3.2.4 Vecteur accélération :

On a $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}}$ donc :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$$

On pose :

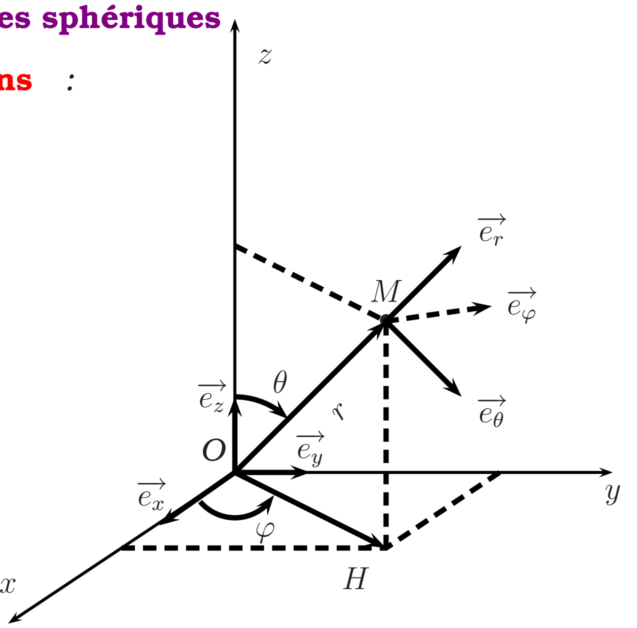
- $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$: accélération radiale.
- $a_t = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$: accélération orthoradiale.

***Remarque-* 5** :
On peut écrire l'accélération orthoradiale a_t comme

$$\boxed{a_t = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}}$$

1.2.3.3 Coordonnées sphériques

1.2.3.3.1 Définitions :



Les coordonnées sphériques sont :

- $r = OM \quad r \geqslant 0$:rayon vecteur
- $\theta = (\widehat{\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{OM}}) \in [0, \pi]$:colatitude
- azimut ;$\varphi \in [0, 2\pi]$.

(r, θ, φ) :coordonnées sphériques .

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

On définit le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ par :

$$\boxed{\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} = \sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\overrightarrow{e_z}}$$

$\| \overrightarrow{e_r} \| = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{e_r}$ *est un vecteur unitaire,on tire donc que*

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}}$$

On a :$\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$ *et* $\overrightarrow{e_\theta}$ *se déduit de* $\overrightarrow{e_r}$ *par simple rotation de* $\dfrac{\pi}{2}$ *dans le plan meridian (OMH).*

$$\boxed{\overrightarrow{e_\theta} = \left.\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta}\right)_{/\mathcal{R}} = \cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} - \sin\theta\overrightarrow{e_z}}$$

On définit

$$\boxed{\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = \sin\theta(-\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y})}$$

On conclut que

$$\boxed{\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\left.\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \varphi}\right)_{/\mathcal{R}} = -\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y} \in (Oxy)}$$

$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ *:trièdre local en coordonnées sphériques .*

1.2.3.3.2 Vecteur déplacement élémentaire :

On a :$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \Longrightarrow d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = d(r\overrightarrow{e_r})_{/\mathcal{R}} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\overrightarrow{e_r}$
Or $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_r}(\theta, \varphi)$*, donc :*

$$d\overrightarrow{e_r} = \frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \varphi}d\varphi = d\theta\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}d\varphi$$

$$\boxed{d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}}$$

Formule à connaître

1.2.3.3.3 Vecteur vitesse :

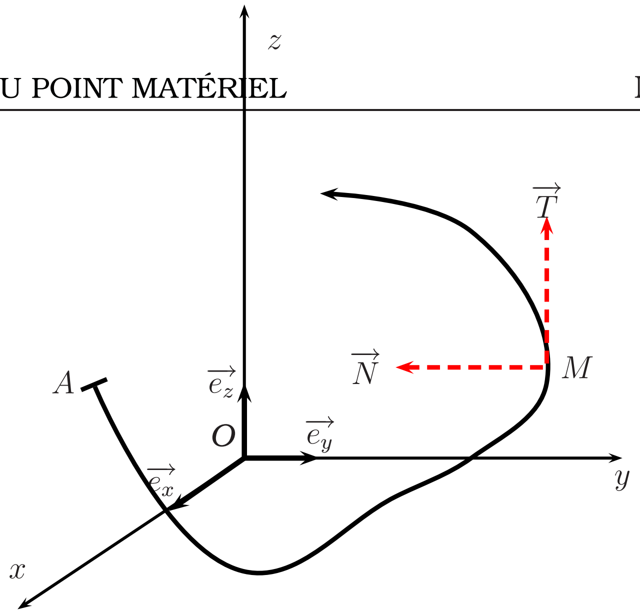
On a :$d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi} \Longrightarrow$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}}$$

1.2.3.4 Coordonnées curvilignes

1.2.3.4.1 Définitions :

Soit $(\mathcal{C})$ *une courbe d'origine* A *et* $M \in (C)$.



On appelle coordonnées curviligne la mesure algébrique de l'arc $\widehat{AM}$ *;on la note* $S(M) = \widehat{AM} \in \mathbb{R}$
Pour un déplacement élémentaire on a :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = ds\overrightarrow{T}(M)}$$

avec :$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ *; et* $\overrightarrow{T}(M)$ *:le vecteur unitaire tangent à* $(\mathcal{C})$ *au point* M *;*
Puisque :
$\| d\overrightarrow{OM} \| = |ds| \; \| \overrightarrow{T}(M) \| \Longrightarrow \| \overrightarrow{T}(M) \| = 1$
On a : $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \dfrac{ds}{dt}\overrightarrow{T}(M)$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = v\overrightarrow{T}(M)}$$

ce qui en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{T}(M) = \frac{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}}$$

$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt} = \dfrac{d(v\overrightarrow{T}(M))}{dt} \Longrightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{T}(M) + v\dfrac{\overrightarrow{T}(M)}{dt}_{/\mathcal{R}}$
Or :$\dfrac{d\overrightarrow{T}(M)}{dt}_{/\mathcal{R}} = \dfrac{d\overrightarrow{T}(M)}{ds}_{/\mathcal{R}}\dfrac{ds}{dt}$
Comme :
$v = \dfrac{ds}{dt}$
et : $\dfrac{d\overrightarrow{T}(M)}{ds}_{/\mathcal{R}} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{ds} = \overrightarrow{N}.\dfrac{1}{\rho_c}$
avec :$\overrightarrow{N}$ *:vecteur unitaire qui se déduit de* $\overrightarrow{T}$ *par rotation de* $\dfrac{\pi}{2}$ *qui se toujours vers la concavité de la trajectoire si* $\rho_c > 0$ *:rayon de courbure au point* M*.D'où :*

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T}(M) + \frac{v^2}{\rho_c}\overrightarrow{N}}$$

Le plan $(\overrightarrow{T},\overrightarrow{N})$ *: plan osculateur .*
On pose :$\overrightarrow{B}(M)=\overrightarrow{T}\wedge\overrightarrow{N}$ *: La binormale .*
$(M,\overrightarrow{T},\overrightarrow{N},\overrightarrow{B})$ *:La base intrinsèque ou base de Frenet.*
On pose :

- $\overrightarrow{a_T}=\dfrac{dv}{dt}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{T}(M)$ *: accélération tangentielle .*
- $\overrightarrow{a_N}=\dfrac{v^2}{\rho_c}\overrightarrow{N}(M)$ *: accélération normale*

***Remarque-* 6 :**
1-Le repère de Frenet est un repère de projection et non pas un repère d'étude.
2-$\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}=\dfrac{\overrightarrow{N}}{\rho_c}$

1.2.3.4.2 Expression du rayon de courbure :

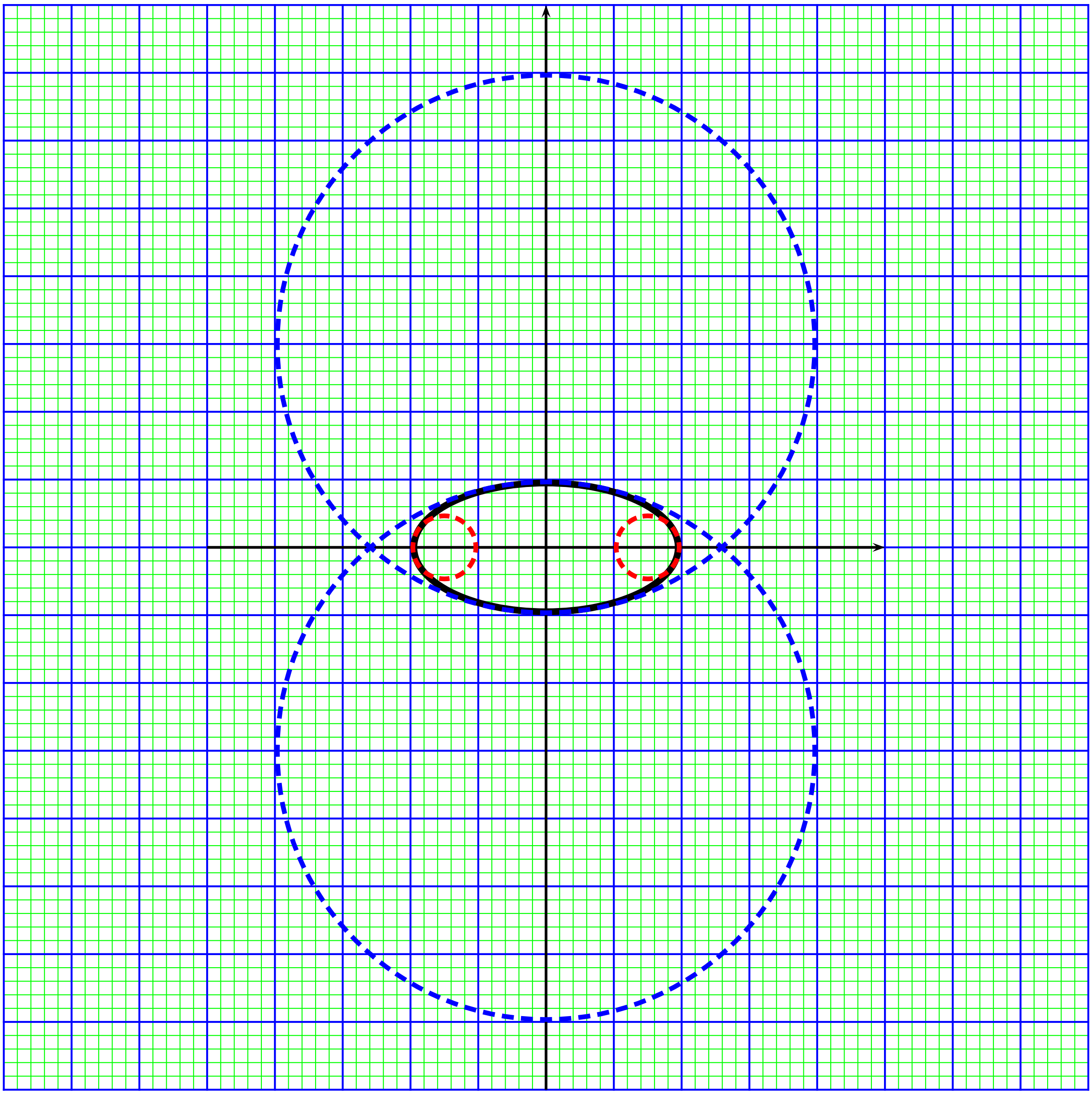
Sachant que :$\overrightarrow{B}(M)=\overrightarrow{T}\wedge\overrightarrow{N}$*, le produit vectoriel* $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{a}$ *permet d'établir l'expression générale de* ρ_c *:*
$\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{a}=v\overrightarrow{T}\wedge(\dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{T}(M)+\dfrac{v^2}{\rho_c}\overrightarrow{N})=\dfrac{v^3}{\rho_c}\overrightarrow{B}$

$$\boxed{\rho_c=\frac{v^3}{\parallel\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{a}\parallel}}$$

Exemple *:de calcul de* ρ_c
Considérons une ellipse droite , situé dans le plan xOy*, d'équations paramétriques :*
$x=a\cos\omega t,\;\; y=b\sin\omega t$ *;* a *et* b *le grand et petit axe et* ω *la pulsation .*
- $\dot{x}=-a\omega\sin\omega t\Longrightarrow\ddot{x}=-a\omega^2\cos\omega t$
- $\dot{y}=b\omega\cos\omega t\Longrightarrow\ddot{y}=-b\omega^2\sin\omega t$

$$\boxed{\rho_C=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}=\frac{(a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t)^{3/2}}{ab}}$$

$R_A=\dfrac{b^2}{a}$ *[au point* $A(t=0)$*],* $R_B=\dfrac{a^2}{b}$ *[au point* $B(t=\dfrac{\pi}{2\omega})$*]*



1.2.4 Exemples de mouvement

1.2.4.1 Mouvement rectiligne à accélération constante

Un point matériel M se déplace sur un axe ox avec une accélération $\overrightarrow{a}(M) = a\overrightarrow{e_x}$ *avec* $a > 0$ *.*

***1**- Déterminer le vecteur vitesse* $\overrightarrow{V}(M)$ *sachant que* $V(t=0) = V_o > 0$*.*

***2**- Déterminer le vecteur position* $\overrightarrow{OM}$ *sachant que* $x(t=0) = x_o$

***3**- Montrer que :*$V^2 - V_o^2 = 2a(x - x_o)$*(Relation indépendante du temps)*

***4**- Quelle est la condition que doit vérifier* $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{V}$ *pour que le mouvement soit uniformément accéleré ?retardé ?*

Réponses

***1**- Le vecteur vitesse* $\overrightarrow{V}(M) = (at + V_o)\overrightarrow{e_x}$

***2**- Le vecteur position* $\overrightarrow{OM} = (\frac{1}{2}at^2 + V_o t + x_o)\overrightarrow{e_x}$

***3**- Montrer que :*$V^2 - V_o^2 = 2a(x - x_o)$*(Relation indépendante du temps)*

On a $t = \frac{V - V_o}{a} \Longrightarrow x - x_o = \frac{1}{2}a(\frac{V - V_o}{a})^2 + V_o(\frac{V - V_o}{a})$ *après simplification on obtient le résultat.*

Remarque : Cette relation valable uniquement lorsque le mouvement est rectiligne avec $a = cte$

***4**- Le mouvement est uniformément :*

- ▶ *accéléré si* $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{a} > 0$
- ▶ *retardé si* $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{a} < 0$

1.2.4.2 Mouvement rectiligne sinusoidal

L'équation horaire du mouvement d'un point matériel sur un axe ox s'écrit sous la forme : $X(t) = X_o + X_m \cos(\omega t + \varphi)$

***1**-Donner l'interpretation de chaque termes.*

***2**- On pose* $x = X - X_o$ *que représente* x

***3**- Si on appelle* T *la période du mouvement , montrer que* $T\omega = 2\pi$

***4**-, Déterminer les composantes du vecteur vitesse et accélération du point M*

***5**- Tracer dans le même graphes les courbes représentatives de l'élongation* $x(t)$ *, vitesse* $v_x(t)$ *et accélération* $a_x(t)$ *dans le cas ou* $\omega > 1$ *;conclure.*

***6**- Déterminer l'équation entre* $x(t)$ *et* $v_x(t)$ *indépendante du temps et la représenter dans le plan* (x, v)*(une telle courbe s'appelle trajectoire de phase)*

Réponses

***1**-L'interpretation de chaque termes.*

- $X(t)$ *: l'élongation*
- X_o *: L'abscisse de la position d'équilibre*
- X_m *: L'amplitude (>0)*
- ω *: pulsation*
- $\omega t + \varphi$ *: La phase*
- φ *: la phase à l'origine*

***2**-* $x = X - X_o$ *représente l'élongation du point M repéré à partir de la position d'équilibre*

***3**-* T *est la période du mouvement donc*

$$x = X_m \cos(\omega t + \omega T + \varphi) = X_m \cos(\omega t + \varphi + 2\pi)$$

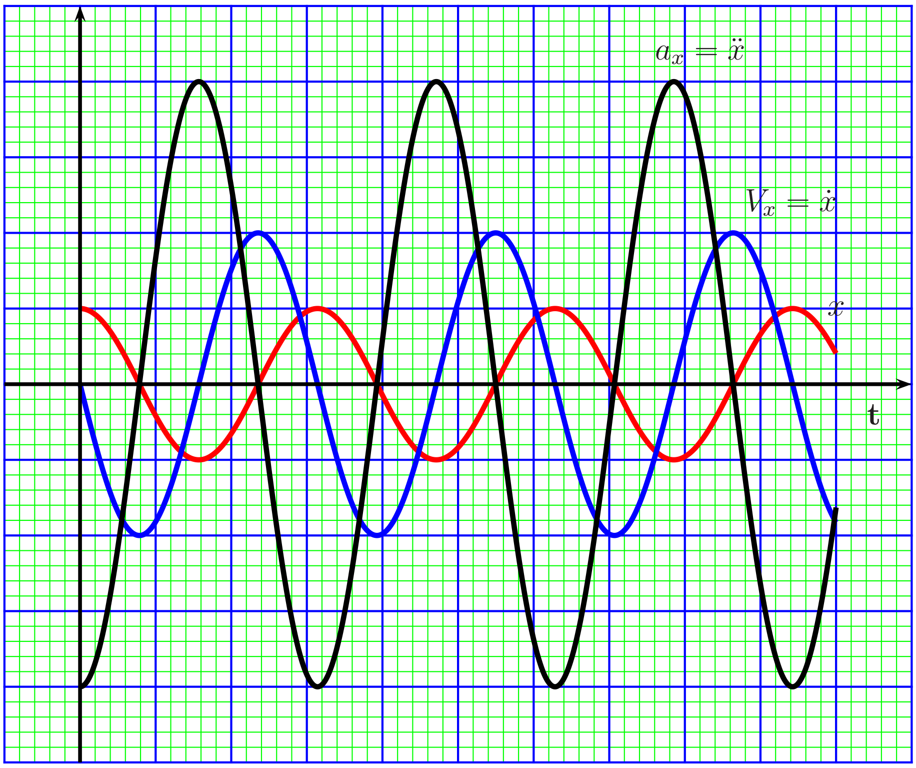
Donc $T\omega = 2\pi$ *c'est à dire*

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

4-, *Les composantes du vecteur vitesse et accélération du point M*

- $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$
- $V_x = \dot{x} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$
- $a_x = \ddot{x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi)$

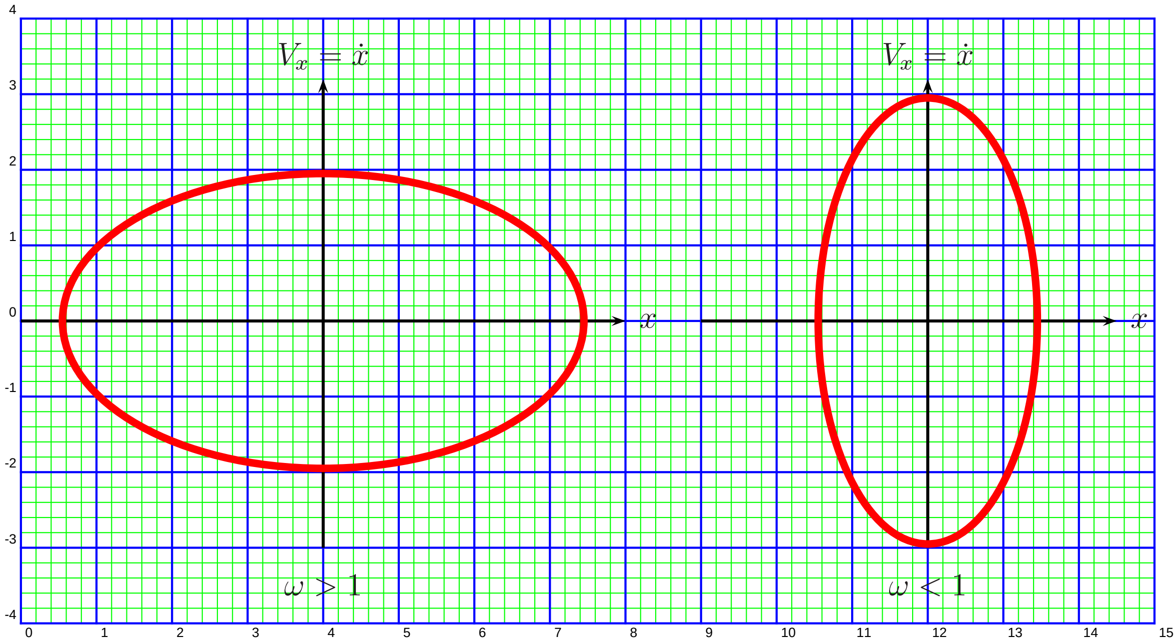
5- *Les courbes représentatives de l'élongation* $x(t)$ *, vitesse* $v_x(t)$ *et accélération* $a_x(t)$ *dans le cas ou* $\omega = 2 > 1$ *et* $X_m = 1$



6- *L'équation entre* $x(t)$ *et* $v_x(t)$ *indépendante du temps*

$$\boxed{\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\dot{x}^2}{(X_m\omega)^2} = 1}$$

C'est l'équation d'un ellipse.
Représentation dans le plan (x, v) *:*



Remarques :

(a)- Si on pose

1.2.4.3 Mouvement circulaire

Un point matériel se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon r et de centre O dans un référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z, t)$, le circle est situé dans le plan (Oxy)
On utilise les coordonnées polaires (r, θ) pour décrire le mouvement de M.
***1**- Rappeler les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OM}$,$\overrightarrow{V}(M)$ et $\overrightarrow{a}(M)$ en coordonnées polaires ,puis les simplifier si le rayon est constant $r = R$.*
2- On suppose que le mouvement est circulaire uniforme
Le mouvement est circulaire uniforme si la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_o = cte$
***2-1**- Établir l'expression de $\theta(t)$ ainsi l'abscisse curviligne s avec $s(\theta = 0) = 0$*
***2-2**- Déterminer les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}(M)$ et accélération $\overrightarrow{a}(M)$.*
***2-3**- Représenter les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}(M)$ et accélération $\overrightarrow{a}(M)$ pour $\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{2\pi}{3}$ .Conclure.*
3-On suppose que le mouvement est circulaire uniformément varié
Le mouvement est uniformément varié si $\ddot{\theta} = \alpha = cte$
***3-1**- Déterminer les lois horaires $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$*
***3-2**- En déduire la relation indépendante du temps*
***3-3**- Représenter le vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}(M)$ et accélération $\overrightarrow{a}(M)$ pour $\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{2\pi}{3}$. On prend les constantes d'integrations nulles*

Réponses

1.2.4.4 Mouvement helicoidal

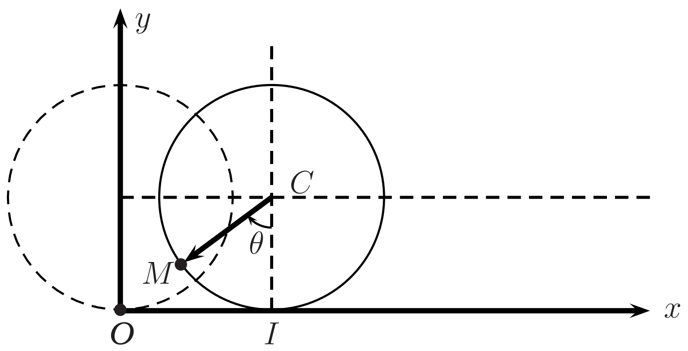
Un mobile est repéré dans la base cylindrique associée à un référentiel donné $\mathcal{R}$ par : $\rho = R$, $\varphi = \omega t$ et $z = a.t$; où a, ω et R sont des constantes positives. La trajectoire est une hélice enroulée sur un cylindre à base circulaire. Le pas h de l'hélice est, par définition, la distance qui sépare deux positions successives du mobile sur une même génératrice de l'hélice.
***1**- Faire une représentation graphique de la trajectoire de M dans $\mathcal{R}$.*

2- *Quelles sont les unités, dans le système international (S.I.), de ω et a ?Quelle relation lie a à h ainsi ω*
3-*Déterminer les vecteurs vitesse et accélération en un point quelconque de la trajectoire :*
3-1- *Dans la base de coordonnées cartésiennes.*
3-2-*Dans la base de coordonnées cylindriques.*
4- *Déterminer le rayon de courbure ρ_c en fonction de R, a et ω*
5- *Déterminer les vecteurs unitaires de la base de coordonnées curvilignes, puis en déduire le rayon de courbure de la trajectoire dans $\mathcal{R}$; Le comparer avec R.*

Réponses

1.2.4.5 Mouvement cycloide

Dans un référentiel $\mathcal{R}$=(O, x, y, z, t) un point M d'un cercle de rayon R se déplace dans le plan (oxy) sans frottement comme l'indique la figure suivante :



On admet que le mouvement se fait avec roulement sans glissement ce qui impose que la mesure de l'arc $\widehat{IM} = R\theta = OI$, et on suppose que le mouvement du centre est uniforme ainsi on pose $\omega = \dot{\theta} = cte$
1- *En utilisant la relation de Chales, Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base des coordonnées cartésiennes en fonction de R, θ*
2- *Exprimer dans la base de coordonnées cartésiennes de $\mathcal{R}$les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M)$ et celles du vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)$ en fonction de R, ω et t.*
3- *Donner l'allure de la trajectoire de M par rapport à $\mathcal{R}$(dite cycloide).*
4- *Montrer que le rayon de courbure ρ_c de la trajectoire décrite par le point M dans $\mathcal{R}$s'écrit sous la forme : $\rho_c = 4R\left|\sin(\frac{\omega t}{2})\right|$*

Chapitre 2

Dynamique du point matériel dans un référentiel galiléen

La dynamique a pour objet de prévoir le mouvement d'un corps dans son environnement.

2.1 Notion de force

Voir photocopie

2.2 Lois de Newton

2.2.1 Principe d'inertie

Dite aussi première loi de Newton.
Il existe une classe de référentiels ,appelés référentiels galiléens par apport auxquels un point matériel ***isolé*** *est en* ***mouvement rectiligne uniforme****.*

Remarque- **7** :

• *Un mouvement rectiligne uniforme ,le vecteur vitesse* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{cte}$*(mouvement de translation rectiligne uniforme ou équilibre .)*

• *Le référentiel de* ***Copérnic*** *est un bon référentiel galiléen si on néglige les actions extérieures autrement dit si le système solaire est supposé isolé.*

• *Le référentiel Géocentrique et terrestre ne sont pas galiléens ;mais on peut les considérer comme galiléens si la durée de l'expérience est très faible par rapport à la période de la terre ; cependant on considère dans notre programme que ces référentiels sont galiléens.*

2.2.2 La relation fondamentale de la dynamique

dite aussi la $2^{ème}$ *loi de* Newton.
Par rapport à un ***référentiel galiléen*** $\mathcal{R}$*,le mouvement d'un corps de masse* m *soumis à plusieurs forces dont la résultante* ($\Sigma\overrightarrow{F}$) *satisfait à la relation :*

$$\boxed{\Sigma\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})}$$

2.2.3 Principe des actions réciproques

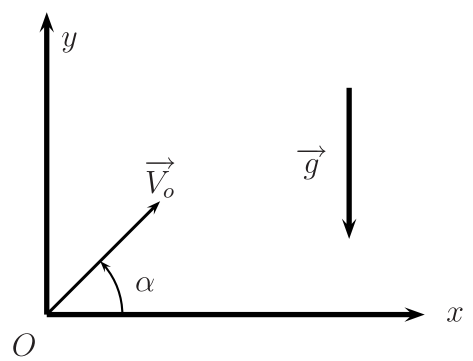
Dite aussi $3^{ème}$ *loi de Newton.*
Si un point matériel A *exerce sur un autre point matériel* B *une force* $\overrightarrow{F}_{A\longrightarrow B}$ *alors le corps* B *exerce sur* A *une force* $\overrightarrow{F}_{B\longrightarrow A}$ *tel que :*

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\longrightarrow B} = -\overrightarrow{F}_{B\longrightarrow A}}$$

2.3 Applications (énoncés voir TD)

2.3.1 Étude d'un projectile avec et sans frottement

Un trièdre orthonormé (Ox, Oy, Oz) *est lié au sol terrestre d'axe* Oz *vertical ascendant. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté :* $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_y}$ *. A l'origine des temps (t = 0), un projectile supposé ponctuel, de masse* m *= 1kg, est lancé du point O avec une vitesse initiale* $\overrightarrow{V}_o$ *située dans le plan* xOy*, faisant un angle* α *avec l'horizontale avec :* V_o *=10* m/s*.*
1*-En projetant la RFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen ,déterminer les composantes du vecteur* $\overrightarrow{OM}$
2*- Exprimer, en fonction de* V_o*,* g *et* α *le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude S, et les coordonnées de ce point S.*
3*- Pour quelle valeur de l'angle* α *la portée du lancement est-elle maximale ? Calculer cette portée.*
4*- En supposant le module* V_o*, de la vitesse initiale, constant, mais* α *variable ; Donner l'équation de la courbe (dite de sûreté) séparant les points du plan* xOy *pouvant être atteints par le projectile, de ceux qui ne seront jamais atteints.*
5*- Le sol fait un angle* $\theta_o < \alpha$ *avec l'horizontale Ox. Déterminer* α *pour que la portée soit maximale. Puis calculer la valeur de cette portée pour* θ_o *= 50°.*



6*-Dans cette partie , on suppose que la résistance de l'air est modélisable par une force de type* $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{V}$
6-1*- Déterminer les composantes du vecteur vitesse* $\overrightarrow{V}(M)$
6-2*- En déduire celles du vecteur position* $\overrightarrow{OM}$

Réponses

***1**-Les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$*
On a :

$$\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{g} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ -g \\ 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M) \left| \begin{array}{l} V_o \cos\alpha \\ -gt + V_o \sin\alpha \\ 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = V_o \cos\alpha t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_o \sin\alpha t \\ z = 0 \end{array} \right.$$

On tire L'équation de la trajectoire

$$y = -\frac{g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x$$

***2**- Le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude S, et les coordonnées de ce point S.*

▶ *Sachant que au point S la vitesse $v_y = 0$ on tire que*

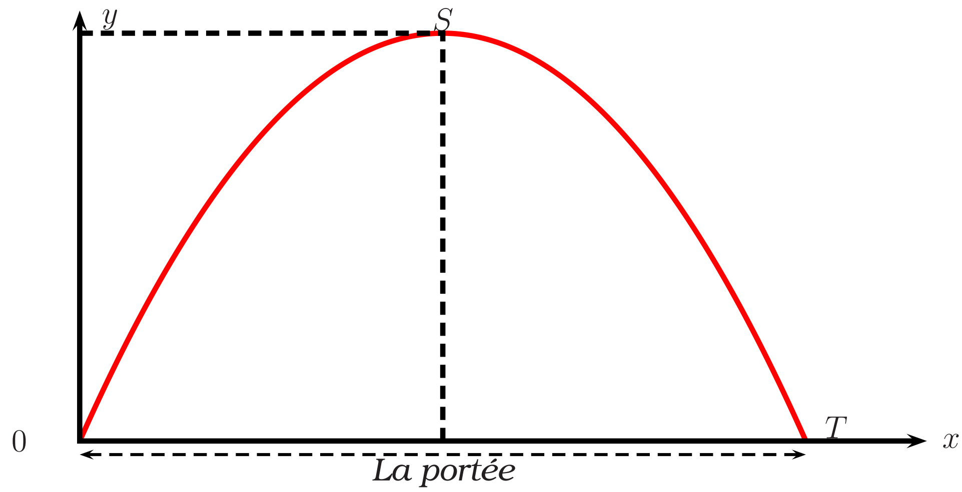
$$\boxed{t_S = \frac{V_o}{g}\sin\alpha}$$

▶ *En utilisant les équations horaires du mouvement on obtient :*

$$\boxed{x_S = \frac{V_o^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad \textit{et} \quad y_S = \frac{V_o^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

***3**- La valeur de l'angle α pour que la portée du lancement est maximale est :*
On définit la portée par la distance $p = OT$ avec T le point définit par $y(T) = 0$
$p = 2x_S = \dfrac{V_o^2 \sin 2\alpha}{g}$ *est maximale si*

$$\boxed{\sin 2\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha(p_{max}) = \frac{\pi}{4}}$$



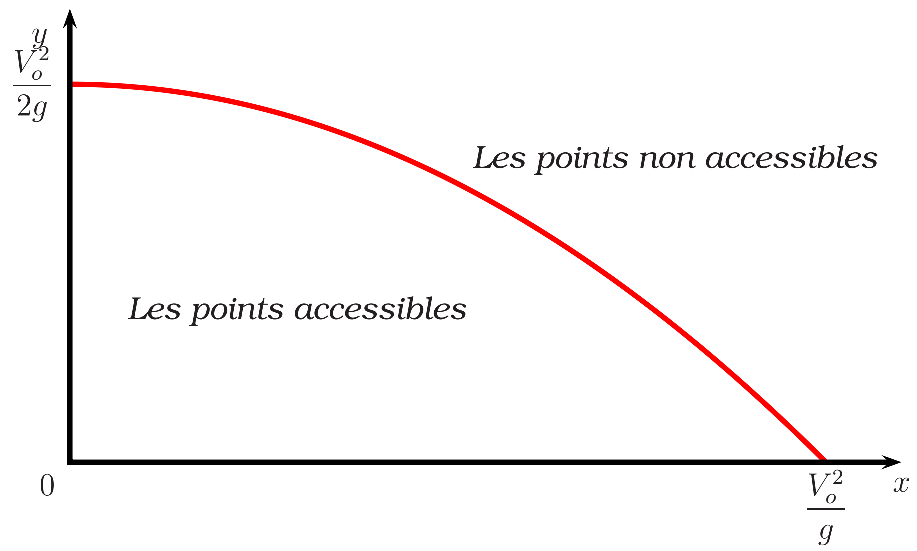
Calcul de la portée portée.$p(\alpha = \frac{\pi}{4}) = 10,2\ m$
***4**- L'équation de la courbe :*
On a à partir de l'équation de la trajectoire :$y = -\dfrac{g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x$ *et connaissant*

que $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$ *on obtient que*

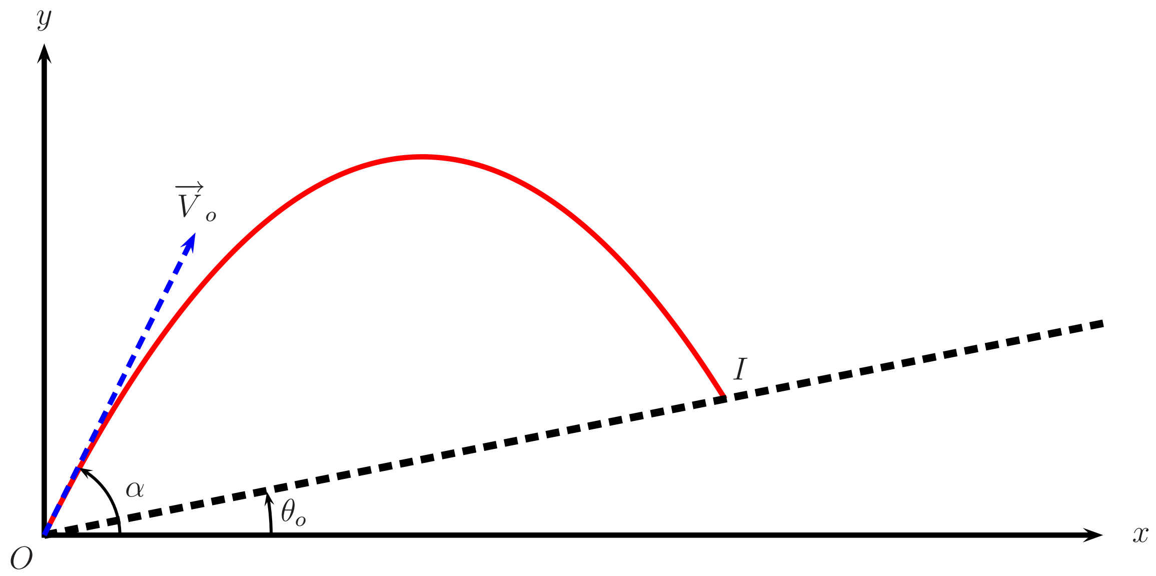
$$\boxed{\frac{gx^2}{2V_o^2}\tan^2\alpha + x\tan\alpha - (y + \frac{gx^2}{2V_o^2}) = 0}$$

C'et une équation du second ordre en $u = \tan\alpha$ *possède des solutions réelles si*

$$\boxed{\Delta' > 0 \Longrightarrow y < \frac{V_o^2}{2g} - \frac{g}{2V_o^2}x^2}$$



5- *Le sol fait un angle* $\theta_o < \alpha$ *avec l'horizontale Ox. Détermination de* α *pour que la portée soit maximale.*



On a $p = OI$ *et on I* $y = x\tan\theta_o = -\dfrac{g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x$ *donc :*

$$-\frac{g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x - V_o\tan\theta_o\cos\alpha t = 0 \Longrightarrow t = \frac{2V_o}{g}(\sin\alpha - \tan\theta_o\cos\alpha)$$

Or $p = \dfrac{x}{\cos\theta_o} \Longrightarrow p = \dfrac{2V_o^2\cos^2\alpha}{g\cos\theta_o}(\tan\alpha - \tan\theta_o)$

$$\boxed{p = \frac{2V_o^2}{g\cos\theta_o}\Big(\frac{\tan\alpha - \tan\theta_o}{1+\tan^2\alpha}\Big) = \frac{2V_o^2}{g\cos\theta_o}\Big(\frac{u-u_o}{1+u^2}\Big)}$$

avec $u = \tan\alpha$ *et* $u_o = \tan\theta_o$

Cette portée est maximale si $\dfrac{dp}{d\alpha} = 0$ *ou bien* $\dfrac{dp}{du} = 0$.

$\dfrac{dp}{du} = 0 \Longrightarrow -\dfrac{u^2 - 2uu_o - 1}{(1+u^2)^2} = 0$ *c'est à dire* $u^2 - 2uu_o - 1$

$$\boxed{u = \tan\alpha = u_o + \sqrt{1+u_o^2}}$$

A.N

$$\alpha = 70^o \Longrightarrow p_{max} = 8,96\ m$$

La valeur de la portée pour θ_o *= 50^o.*

$$\alpha = 70^o \Longrightarrow p_{max} = 8,96\ m$$

6*-Dans cette partie , on suppose que la résistance de l'air est modélisable par une force de type* $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{V}$

6-1*- Les composantes du vecteur vitesse* $\overrightarrow{V}(M)$

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k\dot{x} = 0 \qquad (A) \\ m\ddot{y} + k\dot{y} + mg = 0 \qquad (B) \end{cases}$$

Par intégration on obtient

$$\boxed{V_x = \dot{x} = V_o\cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t}}$$

ainsi

$$\boxed{V_y = \dot{y} = -\frac{g}{k} + (V_o\sin\alpha + \frac{g}{k})e^{-\frac{k}{m}t}}$$

Remarque- 8 *:*

Lorsque $t \to \infty$ *les composantes du vecteur vitesse ,tend vers des valeurs limites*

$$\boxed{V_{x_{limite}} = V_o\cos\alpha}$$

$$\boxed{V_{y_{limite}} = V_o\sin\alpha}$$

6-2*- Les composantes du vecteur position* $\overrightarrow{OM}$ *Par intégration on obtient :*

$$\boxed{x(t) = \frac{mV_o\cos\alpha}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})}$$

Par un DL au voisinage de $k = 0$ *on trouve* $x(t) = V_o\cos\alpha t$

$$\boxed{y(t) = -\frac{m}{k^2} + (kV_o\sin\alpha e^{-\frac{k}{m}t} + mge^{-\frac{k}{m}t} + gkt - V_ok\sin\alpha - gm)}$$

2.3.2 Particule soumise à un frottement fluide de type : $f = -k.V^2$

*Une particule matérielle est lâchée sans vitesse initiale en un lieu ou règne un champ de pesanteur uniforme. La particule est soumise, en plus de la pesanteur, à une force de frottement de l'air proportionnelle au carrée de sa vitesse, d'intensité $f = kV^2$ ($k > 0$) et de **sens opposé** au mouvement. Le référentiel d'étude est un référentiel terrestre considéré galiléen. Le mouvement de la particule est repéré sur un axe Oz descendant, d'origine O (position initiale de la particule) et de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$.*

1- *Écrire l'équation du mouvement de chute. Quelle est la vitesse limite V_∞ atteinte par la particule ?*

2- *Exprimer la vitesse de la particule à l'instant t, en fonction de t, V_∞ et g.*

3- *Quelle est l'expression de la distance parcourue à l'instant t en fonction de g ,V_∞ et V*

On rappelle que : $\dfrac{2a}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{a+x}$

Réponses

1-

▶ *L'équation du mouvement de chute.*

$$\boxed{m\frac{dV}{dt} = mg - kV^2}$$

▶ *La vitesse limite V_∞ atteinte par la particule*

$$\boxed{V_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

2- *L'Expression de la vitesse de la particule à l'instant t, en fonction de t, V_∞ et g.*

On a : $\dfrac{m}{k}\dfrac{dV}{dt} = V_\infty^2 - V^2 \Longrightarrow \dfrac{dV}{V_\infty^2 - V^2} = \dfrac{k}{m}dt$

Par décomposition en éléments simples et sachant que $V(0) = 0$ on obtient

$$\boxed{V(t) = V_\infty \frac{e^{\frac{2kV_\infty t}{m}} - 1}{e^{\frac{2kV_\infty t}{m}} + 1} = V_\infty \tanh \frac{2kV_\infty}{m}t}$$

3-*L'expression de la distance parcourue à l'instant t en fonction de g ,V_∞ et V*

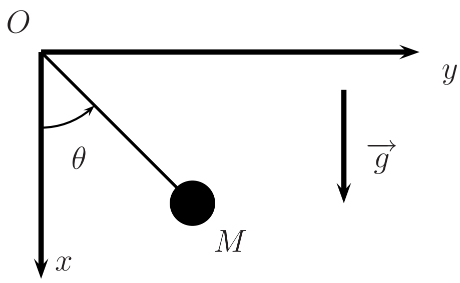
On a : $V = \dfrac{dz}{dt} = V_\infty \tanh \dfrac{2kV_\infty}{m}t$ *et sachant que* $z(t=0) = 0)$ *alors*

$$\boxed{z = \frac{m}{2k}\ln\left[\cosh\frac{2kV_\infty t}{m}\right] = \frac{V_\infty^2}{2g}\ln\frac{V_\infty}{V_\infty - V}}$$

2.3.3 Le pendule simple

On considère le mouvement d'un pendule simple qui oscille dans un milieu où les forces de frottement sont inexistantes.Le pendule est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , accroché par l'intermédiaire d'un fil rigide à un point O fixe .

On suppose le fil rigide sans masse ,Sa longueur est $\ell = 1m$,On note θ l'angle du fil OM avec la verticale . L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ considéré comme uniforme.



On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\theta(t=0) = \theta_o$ et le lâche sans vitesse initiale.

1- *En utilisant la R.F.D établir :*

1-1- *L'équation différentielle du mouvement*

1-2- *L'expression de la tension $\vec{T}$ du fil*

1-3-*L'expression de la pulsation propre ω_o du mouvement*

2- *Résoudre l'équation différentielle du mouvement*

3- *Établir et tracer l'équation de la trajectoire de phase dans le plan $(\theta, u = \dfrac{\dot{\theta}}{\omega_o})$,puis conclure*

4-*On a mesuré pour 20 périodes une durée de 40,12s , Déduire de cette expérience une valeur de g*

Réponses

1-

$$m\vec{a}\left|\begin{array}{l} -m\ell\dot{\theta}^2\vec{e_r} \\ m\ell\ddot{\theta}\vec{e_\theta}\end{array}\right. \qquad \vec{P}\left|\begin{array}{l} mg\cos\theta\vec{e_r} \\ -mg\sin\theta\vec{e_\theta}\end{array}\right. \qquad \vec{T}\left|\begin{array}{l} -T\vec{e_r} \\ 0\vec{e_\theta}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta & (1) \\ -m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta & (2)\end{cases}$$

1-1- *L'équation différentielle du mouvement :(1)*$\Longrightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

1-2- *L'expression de la tension du fil :(2)*$\Longrightarrow$

$$\boxed{T = mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2}$$

1-3- *L'expression de la pulsation propre :*

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

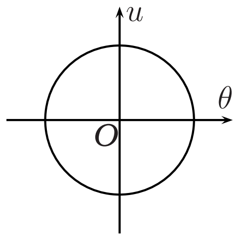
1-4-*Résolution de l'équation différentielle :*

$$\boxed{\theta(t) = \theta_o\cos(\omega t)}$$

2- *L'équation de la trajectoire de phase*

$$\boxed{\theta^2 + u^2 = \theta_o^2}$$

Trajectoire de phase est une courbe fermée(cercle) : mouvement périodique (Oscillateur harmonique)

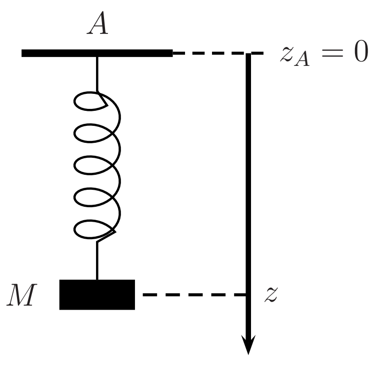


3- *La valeur de g :*

$$\boxed{g = 4\pi^2\ell(\frac{20}{\Delta t})^2 \Longrightarrow g = 9,81 m.s^{-2}}$$

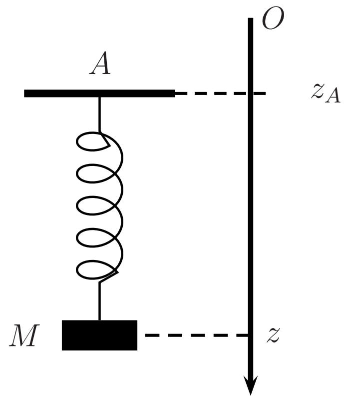
2.3.4 Le pendule élastique

On considère une masse M homogène de masse volumique ρ et de volume V, plongée dans l'eau (masse volumique ρ_e). Cette masse est suspendue a un ressort de raideur k et de longueur à vide l_o, accroché en un point A .
Soit (Oz) un axe vertical oriente vers le bas, le point A est fixe à la cote z_A = 0. On s'interesse au mouvement suivant (Oz) de la masse et on note z la cote du centre de gravite G de la masse. A l'équilibre la masse est située en $z = h$. On négligera la hauteur de la masse M devant h. Soit $\mathcal{R}$le référentiel terrestre suppose galiléen.



1- *Écrire la condition d'équilibre de la masse M dans $\mathcal{R}$.*
2- *En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'oscillation de M. On écrira une équation reliant z et ses dérivées, M, k et h. Donner la pulsation propre ω_o de cet oscillateur. On négligera les frottements dans cette question.*
3- *Commenter le fait que ω_o ne dépende pas de l'intensité de la poussée d'Archimède. Y a-t-il un terme de l'équation différentielle précédente qui en dépende ?*
4- *On tient compte d'une force de frottement visqueux, colinéaire à la vitesse et*

d'intensité $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{V}$ (identique dans tous les référentiels) de l'eau sur la masse M. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par z. En se plaçant dans le cas d'un amortissement faible, donner sans calcul l'allure de la fonction $z(t)$ avec les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, $z = h_1 > h$ et la vitesse initiale est nulle.
5- *A l'aide d'un piston, on impose à l'extremite A du ressort, un mouvement vertical sinusoidal d'amplitude z_{Am} ; donc $z_A(t) = z_{Am}cos(\omega t)$. Écrire dans le référentiel $\mathcal{R}$' , lie à A, l'équation différentielle vérifiée par z' cote de G dans $\mathcal{R}$'.*
6- *Calculer l'amplitude des oscillations de la masse M dans $\mathcal{R}$' . On utilisera la notation complexe et on fera apparaître les constantes ω_o,$\tau = \dfrac{M}{\alpha}$ et la variable $x = \dfrac{\omega}{\omega_o}$*
7- *Dans ce dispositif, l'intérêt du ressort est de permettre d'obtenir des oscillations de la masse d'amplitude supérieure à celle de l'excitation. Chercher un intervalle de pulsations pour lequel cette condition est vérifiée. Vous montrerez que cet intervalle existe si la masse M est supérieure à une certaine valeur que vous préciserez.*
8-*Si la condition précédente est vérifiée, pour quelle pulsation l'amplitude d'oscillation de la masse M est-elle maximale ?*



Réponses

1- *La condition d'équilibre de la masse M dans $\mathcal{R}$.*

$$\boxed{Mg = F_A + k(h - l_o)}$$

2- *L'équation différentielle du mouvement de l'oscillation de M.*
On projette la RFD sur l'axe Oz on obtient :

$$M\ddot{z} = Mg - \alpha\dot{z} - F_A - k(z - l_o) = Mg - \alpha\dot{z} - F_A - k(z - h) - k(h - l_o)$$

La condition d'équilibre donne

$$\boxed{M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z - h) = 0}$$

La pulsation propre $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$.
3- *ω_o ne dépend que des paramètres intrinsèque du système*
Le terme de l'équation différentielle précédente qui en dépend est h la position d'équilibre
En général toute forces constantes n'apparaissent pas dans l'équation

différentielle, son rôle est de modifier la position d'équilibre

4- *La nouvelle équation différentielle vérifiée par z.*

$$\boxed{M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z-h) = 0 \Longrightarrow \ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_o^2(z-h) = 0}$$

Avec $\lambda = \dfrac{\alpha}{2M} \ll \omega_o$ *amortissement faible*
dans ce cas la solution est de la forme :

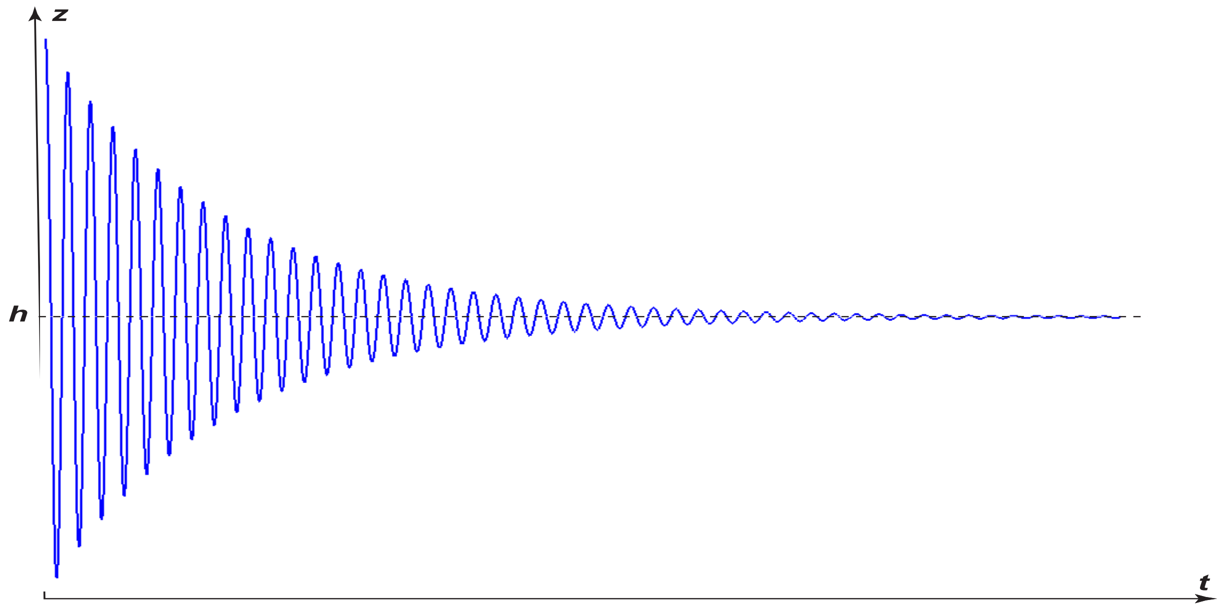
$$z(t) = h + Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) \qquad \Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$$

A *et* φ *deux constantes d'intégration à déterminer par les C.I.*
Comme $\lambda \ll \omega_o \Longrightarrow \Omega \simeq \omega_o$ *ainsi :*

- $z(t=0) = h_1 \Longrightarrow h_1 = h + A\cos\varphi$
- $\dot{z}(t=0) = 0 \Longrightarrow \tan\varphi = -\dfrac{\lambda}{\omega_o} \to 0$ *c'est à dire* $\varphi \to 0$ *On en déduit que*

$$\boxed{z(t) = h + (h_1 - h)e^{-\lambda t}\cos\omega_o t}$$

Représentation graphique de $z(t)$ *pour* $h = 5$ *,*$h_1 = 6$ *,* $\lambda = 0.2$ *et* $\omega_o = 10$



5- *L'équation différentielle.*

$$\boxed{M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z-h) = kz_A}$$

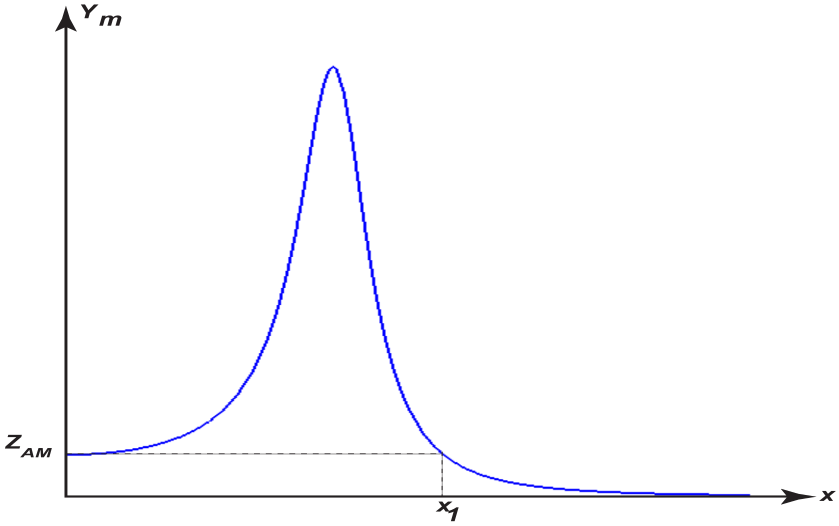
En posant $y = z - h$ *on obtient*

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{1}{\tau}\dot{y} + \omega_o^2 y = \omega_o^2 Z_{AM}\cos\omega t}$$

6- *On cherche une solution qui décrit le régime permanent sous la forme* $y(t) = Y_m\cos(\omega t + \varphi)$ *et en notation complexe on trouve*

$$\boxed{Y_m = \frac{Z_{AM}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{\tau^2\omega_o^2}}}}$$

La représentation graphique de X_M *en fonction de la pulsation réduite* x



***7**- L' intervalle de pulsations est* $[0, \omega_1 = x_1\omega_o]$. *telle que* $Z_{AM} = Y_M$ *c'est à dire* x_1 *solution de*

$$\boxed{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{\tau^2\omega_o^2} = 1}$$

La solution est

$$x_1^2 = 2 - \frac{1}{\tau^2\omega_o^2}$$

Si $2 - \dfrac{1}{\tau^2\omega_o^2} > 0 \Longrightarrow M > \dfrac{\alpha^2}{2k} = M_c$ *alors*

$$\boxed{\omega_1 = \omega_o\sqrt{2 - \frac{1}{\tau^2\omega_o^2}}}$$

***8**-L'amplitude d'oscillation de la masse M est maximale si* $\dfrac{dY_M}{dx} = 0$

$$\boxed{\omega_R = \omega_o\sqrt{1 + \frac{1}{2\tau^2\omega_o^2}}}$$

2.3.5 Mouvement d'une particule chargé dans un champ uniforme

Une particule électrique ponctuelle M *de masse* m *et portant une charge* $q > 0$ *mobile dans une région d'espace où règne un champ :*

- *Électrique uniforme* $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{e_y}, \quad E > 0$
- *Magnétique uniforme* $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}, \quad B > 0$

La charge est émise sans vitesse initiale au point O *à* $t = 0$.

***1**-*

1-1/ Par application de la RFD trouver un système de trois équations différentielles scalaires vérifiées par x, y *et* z.

1-2/ Résoudre ce système et en déduire $x(t), y(t)$ *et* $z(t)$ *on posera :* $\omega = \dfrac{qB}{m}$

1-3/ Représenter la trajectoire .

1-4/ En déduire le rayon de courbure en fonction des données.

2- *On suppose maintenant que la particule possède une vitesse initiale :* $\overrightarrow{V}_o = V_o\overrightarrow{e_x}$

2-1/ Retrouver :$x(t), y(t)$.

2-2/ Pour quelle valeur particulière v_{oc} *de* v_o *, la charge décrit un mouvement rectiligne confondu avec* Ox. *Exprimer* v_{oc} *en fonction de* E *et* B.

2-3/ Que peut-on dire dans ce cas sur la force exercée sur la charge.

2-4/ Représenter la trajectoire de la particule dans le cas ou $v_o = 2v_{oc}$

Réponses

1- :

1-1- $m\overrightarrow{a}(M) = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V}_i \wedge \overrightarrow{B}) \Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B & (1) \\ m\ddot{y} = q(E - \dot{x}B) & (2) \\ m\ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$

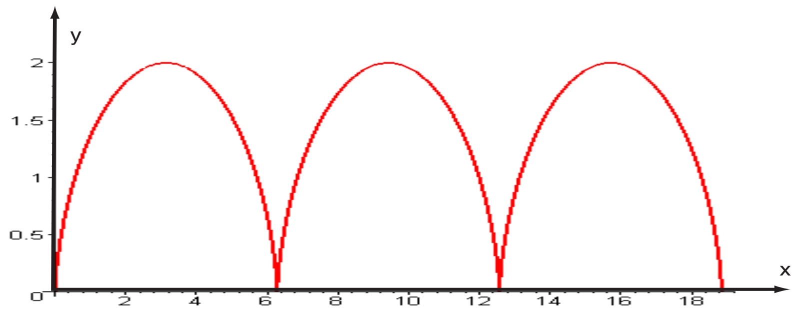
1-2-*Par intégration on trouve :*

$$\boxed{x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin\omega t)}$$

$$\boxed{y = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos\omega t)}$$

$$\boxed{z = 0 \qquad \textit{mouvement plan}}$$

1-3- *Representation graphique (on prend* $\frac{E}{B\omega} = 1$*)*



1-4- *Le rayon de courbure est*

$$\boxed{\rho_c = \frac{4E}{B\omega}|\sin(\frac{\omega t}{2})|}$$

2- :

2-1- $\overrightarrow{V}_i = v_o\overrightarrow{e_x}$

2-1-1-

$$\boxed{x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin\omega t) + \frac{v_o}{\omega}\sin(\omega t)}$$

$$\boxed{y = (\frac{E}{B} - v_o)\frac{1}{\omega}(1 - \cos\omega t)}$$

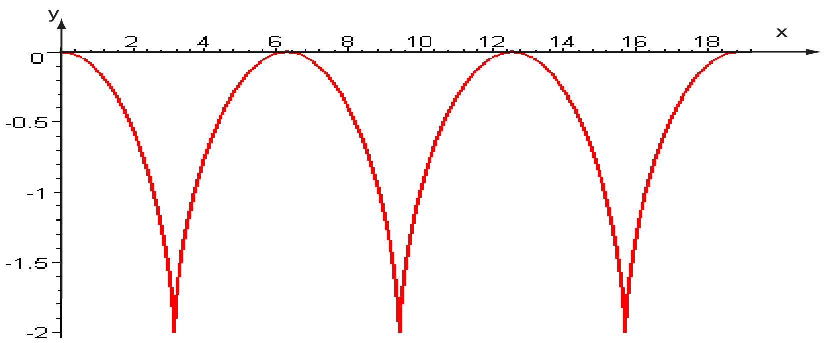
2-1-2- *Le mouvement est rectiligne confondu avec ox :* $\forall t \Longrightarrow$

$$\boxed{v_{oc} = \frac{E}{B}}$$

2-1-3- $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V}_i \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}$ *la force magnétique compense la force électrique*

2-1-4- *Representation graphique avec* $v = 2v_{oc}$

On rappelle que dans ce cas , on a : $\begin{cases} x = \dfrac{E}{B\omega}(\omega t + \sin \omega t) \\ y = -\dfrac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega t) \end{cases}$



Chapitre 3

Puissance et travail d'une force. Théorème de l'énergie cinétique

3.1 Puissance et travail d'une force

3.1.1 Définitions

▶ *On appelle la puissance d'une force* $\overrightarrow{F}$ *appliquée sur un point matériel M de masse m et de vitesse* $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ *par rapport à un référentiel* $\mathcal{R}$*la quantité :*

$$\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) \quad (watt)}$$

▶ *Lorsque le point M effectue un déplacement élémentaire* $d\overrightarrow{OM}$ *pendant l'instant* dt *sous l'action d'une force* $\overrightarrow{F}$*, on définit le travail élémentaire par :*

$$\boxed{\delta\mathbf{W} = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} \quad (Joule)}$$

On remarque que :

$$\boxed{\frac{\delta\mathbf{W}}{dt} = \mathcal{P}}$$

3.1.2 Exemples

▶ *Travail du poids (*$\overrightarrow{e_z}$ *vers le haut)*

$$\underset{A\to B}{\mathbf{W}}(\overrightarrow{P}) = -mg(z_B - z_A)$$

▶ *Travail de la tension d'un ressort*

$$\underset{A\to B}{\mathbf{W}}(\overrightarrow{T}) = -\frac{1}{2}k[(l_B - l_o)^2 - (l_A - l_o)^2]$$

▶ *Travail de la force de Lorentz* $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}$

$$\underset{A\to B}{\mathbf{W}}(\overrightarrow{F}) = 0$$

3.2 Énergie cinétique. Théorème de l'énergie cinétique

▶ *Dans un référentiel galiléen* $\mathcal{R}$*on a :* $\overrightarrow{F} = m\left.\dfrac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}$ *; et comme :*$\mathcal{P} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ *alors :*

$$\mathcal{P} = m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}).\left.\frac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} \Longrightarrow \mathcal{P} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2\right)$$

On appelle l'énergie cinétique d'un point matériel qu'on note $\mathbf{E}c$ *la quantité positive :*

$$\boxed{\mathbf{E}c = \frac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2}$$

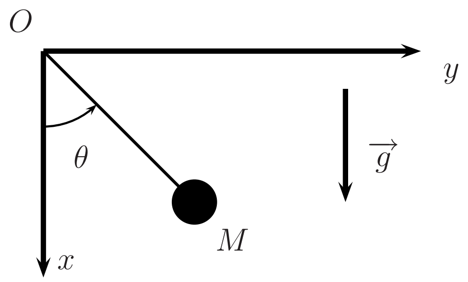
▶ *On a :*$\mathcal{P} = \dfrac{\delta W}{dt} = \dfrac{d\mathbf{E}c}{dt}$ *donc :*

$$\boxed{\Delta\mathbf{E}c = \underset{A\to B}{\mathbf{W}}(\overrightarrow{F})}$$

T.E.C

Énoncé :*Dans un référentiel galiléen , la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail entre ces instants des forces qui lui sont appliquées .*

Application : *:pendule simple*



On a : $d\mathbf{E}c = \delta\mathbf{W} \Longrightarrow \Delta\mathbf{E}c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_0^{\,2} = \mathbf{W}(\overrightarrow{P}) + \mathbf{W}(\overrightarrow{T})$

- $\mathbf{W}(\overrightarrow{P}) = -mgh = -mg\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta)$
- $\mathbf{W}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{T} \perp \overrightarrow{e_\theta}$

Par égalité on tire que :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (E)}$$

Par simple dérivation temporelle de (E) on obtient : $\dot{\theta}(\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0$
Puisque $\dot{\theta} \neq 0$ *(car sinon alors pas de mouvement)on aura :*

$$\boxed{\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

Remarque- 9 *:*
: Dans le cas d'une charge ponctuelle soumise seulement a une force magnétique $\overrightarrow{F}_m = q\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}$ *alors :* $\dfrac{d\mathbf{E}c}{dt} = \overrightarrow{F}_m.\overrightarrow{V} = 0$ *Ce qui justifie que :*$\mathbf{E}c = cte \Longrightarrow V = cte = V_0$

3.3 Force conservatives. Énergie potentielle

3.3.1 Définition

Une force $\overrightarrow{F}$ est dite conservative si on peut écrire

$$\boxed{\delta\mathbf{W} = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = -d\mathbf{E}p}$$

$\mathbf{E}p$ *est appelée énergie potentielle.*
c'est à dire que son travail ne dépend pas du chemin suivi, et par conséquent

$$\boxed{\Delta\mathbf{E}p = \underset{A\to B}{\mathbf{W}}(\overrightarrow{F})}$$

3.3.2 Exemples

▶ ***Énergie potentielle élastique d'un ressort** :*
On rappelle que : $\overrightarrow{T} = -k\overrightarrow{OM}$, *avec O position d'équilibre .*
Si on pose :$\overrightarrow{OM} = (\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_x} = x\overrightarrow{e_x}$
alors : $\overrightarrow{T}.d\overrightarrow{OM} = -kx\overrightarrow{e_x}.x\overrightarrow{e_x} \Longrightarrow \overrightarrow{T}.d\overrightarrow{OM} = d(-\frac{1}{2}kx^2 + cte)$
d'où :

$$\boxed{\mathbf{E}p_e = \frac{1}{2}kx^2 + cte = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cte}$$

On conclut que la tension d'un ressort est une force conservative.

▶ ***Énergie potentielle newtonienne***
On rappelle que : $\overrightarrow{F} = -\frac{Gm_Am_B}{r^2}\overrightarrow{e_r} = \frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ *avec* $(\alpha < 0)$.
En coordonnées sphériques on a :$\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e_r}.(dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}) = \alpha\frac{dr}{r^2}$
D'où :

$$\boxed{\mathbf{E}p_p = \frac{\alpha}{r} + cte}$$

On conclut que la force de Newton est une force conservative.

Remarque- 10 *:*
De la même façon on montre que la force coulombienne :$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{e_r} = \frac{\beta}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ *est une force conservative*

▶ ***Énergie potentielle de pesanteur***
On rappelle que : :$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{e_z}$
Dans le cas où $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{cte}$ *; c'est à dire* $\overrightarrow{g}$ ***est uniforme**,on obtient :*
$\overrightarrow{P}.d\overrightarrow{OM} = -mg\overrightarrow{e_z}.(dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}) = -mgdz$

$$\boxed{\mathbf{E}p_p = mgz + cte}$$

On conclut que si $\overrightarrow{g}$ *est uniforme alors le poids* $\overrightarrow{P}$ *est conservative.*

3.4 Énergie mécanique

On appelle énergie mécanique d'un point matériel $M(m)$ la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle.

$$\boxed{E_m = \mathbf{E}c + \mathbf{E}p}$$

3.4.1 Théorème de l'énergie mécanique

On pose : $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_c + \overrightarrow{F}_{nc}$ *avec :*
-$\overrightarrow{F}_c$ *: la résultante des forces conservatives.*
-$\overrightarrow{F}_{nc}$ *: la résultante des forces non conservatives.*
Théorème de l'énergie cinétique donne :
$\Delta\mathbf{E}c = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_c) + \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{nc}) \Longrightarrow \Delta(\mathbf{E}c + \mathbf{E}p) = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{nc})$
On tire le théorème de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\Delta E_m = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{nc})}$$

ÉNONCÉ :***Dans un référentiel galiléen , la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel dans un champ de forces conservatives entre deux instants est égale au travail entre ces instants des forces non conservatives qui lui sont appliquées***

3.4.2 Cas particulier important

Si $\mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{nc}) = 0$ *alors* $\Delta E_m = 0$
Donc l'énergie mécanique est constante c'est à dire que l'énergie mécanique se conserve :l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle et vice versa ;c'est l'intégrale première de l'énergie.

Remarque- 11 *:*

1. *On a* $E_m = \mathbf{E}c + \mathbf{E}p$ *et comme* $\mathbf{E}c \geqslant 0$ *alors*

$$\boxed{E_m \geqslant \mathbf{E}p}$$

2. *Le premier principe de la thermodynamique :*

$$\Delta U + \Delta E_m = \mathbf{W} + \mathbf{Q} \Longrightarrow \Delta U + \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{NC}) = \mathbf{W} + \mathbf{Q}$$

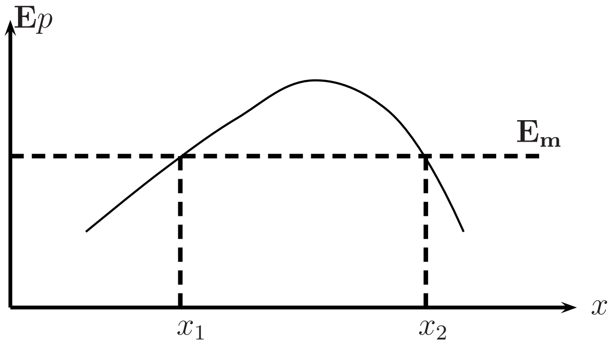
3.5 Applications :Équilibre d'un point matériel dans un champ de forces conservatives

Hypothèse de travail : *système unidimensionnel :*$\mathbf{E}p(M) = \mathbf{E}p(x)$.

3.5.1 Barrière d'énergie potentielle

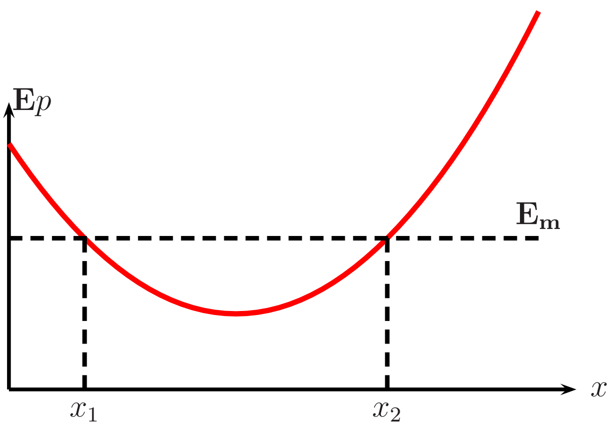
On a : $E_m = \mathbf{E}p + \mathbf{E}c$ *et comme* $\mathbf{E}c = \frac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2 \geq 0$,*alors :*

$$\boxed{E_m = \mathbf{E}p + \mathbf{E}c \geq \mathbf{E}p}$$



Domaine permis à la particule : $x \leq x_1$ *ou* $x \leq x_2$
• *Si à* $t = 0, x_0 < x_1$ *:le point matériel ne peut franchir la barrière potentielle.*
• *Si à* $t = 0, x_0 > x_2$ *:le point matériel peut s'éloigner à l'infini , on dit qu'on a un état de diffusion.*

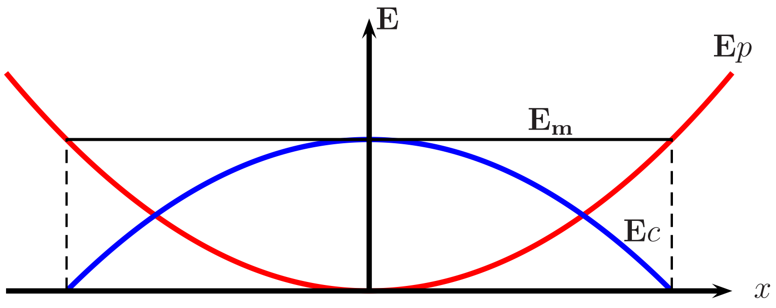
3.5.2 Cuvette d'énergie potentielle



Domaine permis est $[x_1, x_2]$ *; on dit que la particule est dans un état lié :**La particule effectue un mouvement périodique***

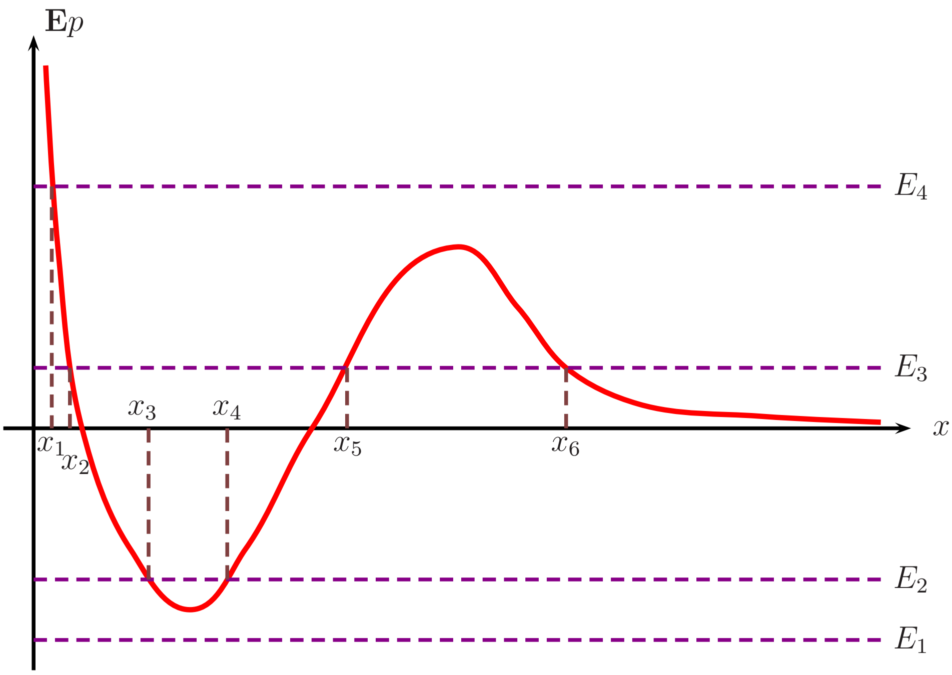
3.5.3 Cas de l'oscillateur harmonique

$\mathbf{E}p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c$,*on prend la position d'équilibre comme origine des énergie potentielle*



3.5.4 Exemple général

Soit un point matériel qui se déplace dans un champ de forces conservatives dont l'énergie potentielle à l'allure suivante.



Suivant les conditions initiales on peut avoir :

▶ $E_m = E_1$ *mouvement impossible (*$\mathbf{E}c < 0$*)*

▶ $E_m = E_2 \Longrightarrow x \in [x_3, x_4]$ *: état lié ; on a un mouvement elliptique (par conséquent périodique) ,la trajectoire de phase est une courbe fermé.*

▶ $E_m = E_3 \Longrightarrow x \in [x_2, x_5] \cup [x_6, \infty]$ *: Si :*

• $x \in [x_2, x_5]$ *état lié ; on a un mouvement elliptique ,la trajectoire de phase est une courbe fermé.*

• $x \in [x_6, \infty]$ *état de diffusion ; on a un mouvement rectiligne ou parabolique ou hyperbolique ,la trajectoire de phase est une courbe ouverte.*

▶ $E_m = E_4 \Longrightarrow x \in [x_1, \infty]$ *: état de diffusion ; on a un mouvement rectiligne ou parabolique ou hyperbolique ,la trajectoire de phase est une courbe ouverte.*

3.5.5 Équilibre d'un point matériel soumis à l'action des forces conservatives

3.5.5.1 Condition d'équilibre

On a : $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_c + \overrightarrow{F}_{nc} = \overrightarrow{F}_c$ *ainsi*

$$\boxed{\delta \mathbf{W} = -d\mathbf{E}p = F(x)dx \Longrightarrow F(x) = -\frac{d\mathbf{E}p}{dx}}$$

Á l'équilibre en $x = x_e$ *,*$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow F(x_e) = 0$
Soit :

$$\boxed{(\frac{d\mathbf{E}p}{dx})_{x=x_e} = 0}$$

condition nécessaire mais insuffisante,(ajouter $\overrightarrow{V}_0 = \overrightarrow{0}$*)*

Conclusion :

: ***Á l'équilibre ,l'énergie potentielle est extrêmale***

3.5.5.2 Condition de stabilité

• *Si* x_e *est une position d'équilibre* ***stable*** *alors si on écarte* M *de sa position ,la force tend à le faire revenir à sa position d'équilibre stable ;autrement dit*

$$\boxed{(\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM})_{x=x_e} < 0}$$

On dit que $\overrightarrow{F}$ *est une force de rappel*
• *Si* x_e *est une position d'équilibre* ***instable*** *alors si on écarte* M *de sa position d'équilibre ,la force tend à le faire divergé de sa position d'équilibre ;autrement dit*

$$\boxed{(\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM})_{x=x_e} > 0}$$

3.5.5.3 Critère de stabilité

On fait un DL de $\mathbf{E}p$ *au voisinage de la position d'équilibre* x_e*.*

$$\mathbf{E}p(x) \simeq \mathbf{E}p(x_e) + (x - x_e)(\frac{d\mathbf{E}p}{dx})_{x_e} + \frac{1}{2}(x - x_e)^2(\frac{d^2\mathbf{E}p}{dx^2})_{x_e} + ...$$

x_e *est une position d'équilibre alors* $(\frac{d\mathbf{E}p}{dx})_{x=x_e} = 0$
Par conséquent :

$$\mathbf{E}p(x) \simeq \mathbf{E}p(x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^2(\frac{d^2\mathbf{E}p}{dx^2})_{x_e} + ...$$

d'où :

$$\boxed{F(x) = -\frac{d\mathbf{E}p}{dx} = -(x - x_e)\frac{d^2\mathbf{E}p}{dx^2}}$$

• *Si* $\frac{d^2\mathbf{E}p}{dx^2} > 0$,$x_e$ *est un minimum :*

$$\left.\begin{array}{l} x > x_e \Longrightarrow F(x) < 0 \\ x < x_e \Longrightarrow F(x) > 0 \end{array}\right\} x_e \textit{ est une position d'équilibre stable}$$

$$\boxed{\textbf{\textit{équilibre stable}} \Longrightarrow \mathrm{E}p \textbf{\textit{ minimale}}}$$

Remarque- 12 :

:On a $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}(M) \Longrightarrow F(x) = m\ddot{x}$

$\Longrightarrow m(x \ddot{-} x_e) = -(x - x_e)(\frac{d^2\mathbf{E}p}{dx^2})_{x=x_e}$

$\Longrightarrow \ddot{X} + \frac{1}{m}(\frac{d^2\mathbf{E}p}{dx^2})_{x=x_e} X = 0$

c'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique avec :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{1}{m}(\frac{d^2\mathbf{E}p}{dx^2})_{x=x_e} = \frac{1}{m}(\frac{d^2\mathbf{E}p}{dX^2})_{X=0}}$$

- *Si* $\frac{d^2\mathbf{E}p}{dx^2} < 0$,$x_e$ *est un maximum de* $\mathbf{E}p$ *:*

$$\left.\begin{array}{l} x > x_e \Longrightarrow F(x) > 0 \\ x < x_e \Longrightarrow F(x) < 0 \end{array}\right\} x_e \textit{ est une position d'équilibre instable}$$

Chapitre 4

Oscillateur linéaire à un degré de liberté

4.1 Rappel sur l'oscillateur harmonique

L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique au voisinage d'une position d'équilibre stable est

$$\boxed{a\ddot{X} + bX = c}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *Qu'on peut écrire*

$$\boxed{a\ddot{X} + b(X - \frac{c}{b}) = 0}$$

On pose

$$\boxed{x = X - \frac{c}{b} \quad ; \quad \omega_o^2 = \frac{b}{a}}$$

- x *: l'élongation repéré à partir de la position d'équilibre stable* ($x_e = 0 \Longrightarrow X_e = \frac{c}{b}$
- $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$ *pulsation propre . Ce qui permet d'écrire la **forme canonique** de l'oscillateur*

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0}$$

La solution de cette équation donne :
$x(t) = X_m \cos(\omega_o t + \varphi) \Longrightarrow \dot{x} = -X_m\omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)$
Dans le cas de l'oscillateur harmonique $k = m\omega_o^2$ *on obtient pour :*

- $\mathbf{E}p = \frac{1}{2}kx^2(+cte = 0) \Longrightarrow \mathbf{E}p = \frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_o t + \varphi)$
- $\mathbf{E}c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Longrightarrow \mathbf{E}c = \frac{1}{2}m\omega_o^2 X_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi) = \frac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi)$
- $E_m = \mathbf{E}c + \mathbf{E}p = \frac{1}{2}kX_m^2 = cte$ *caractéristique d'un système conservatif.*

Calculons la valeur moyenne des énergies sur une période T *; On rappelle que*

$$< \cos^2 x >=< \sin^2 x >= \frac{1}{2}$$

- $< \mathbf{E}p >= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{E}p\ dt$

$$\boxed{< \mathbf{E}p >= \frac{1}{4}kX_m^2}$$

- $< \mathbf{E}c >= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{E}c\ dt$

$$\boxed{< \mathbf{E}c >= \frac{1}{4}kX_m^2}$$

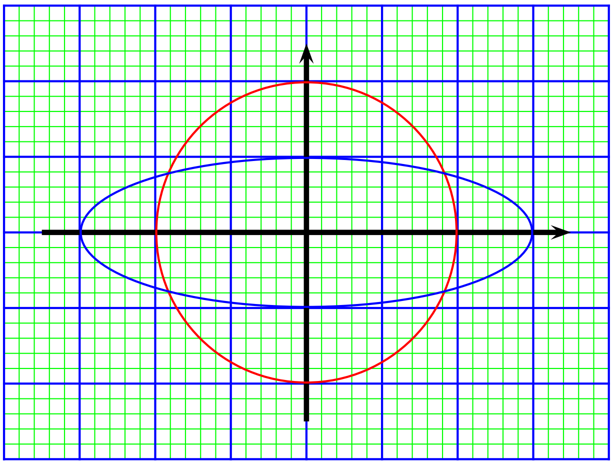
- $< Em >= \frac{1}{T}\int_0^T E_m\ dt$

$$\boxed{< E_m >= \frac{1}{2}kX_m^2}$$

On retient que

$$\boxed{< \mathbf{E}c >=< \mathbf{E}p >= \frac{< E_m >}{2}}$$

Ainsi la trajectoire de phase est une ellipse dans le plan $(x, \dot{x})$ *ou un cercle dans le plan* $(x, \frac{\dot{x}}{\omega_o})$



4.2 régime libre d'un oscillateur linéaire amorti

4.2.1 Forme canonique de l'équation différentielle

On s'interesse à un oscillateur linéaire amorti par un frottement fluide visqueux (du à l'action d'un fluide et proportionnel à la vitesse).
L'équation différentielle d'un tel oscillateur s'écrit :

$$\boxed{a\ddot{X} + h\dot{X} + bX = c}$$

avec $(a, h, b) \in \mathbb{R}_+^3$ *et* $c \in \mathbb{R}$.
On pose dans la suite :

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{b}{a}}}$$

La pulsation propre de l'oscillateur

$$\boxed{\frac{h}{a} = 2\alpha = \frac{\omega_o}{\mathbf{Q}} = \frac{1}{\tau}}$$

• α *: la constante d'amortissement .*
• τ *: le temps de relaxation (c'est le temps nécessaire pour que l'amplitude se divise par* e *.*
• Q *: le facteur de qualité .*

$$\boxed{x = X - \frac{c}{b}}$$

l'élongation repéré à partir de la position d'équilibre

La forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur linéaire amorti par un frottement fluide visqueux s'écrit donc :

$$\boxed{\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0}$$

Remarque- 13 *:*
Dans ce cas l'énergie mécanique est fonction décroissante du temps, en effet

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_f) = -h\overrightarrow{V}^2 < 0}$$

4.2.2 Différents régimes libres amortis

On a :
▷ *l'équation différentielle :* $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$
▷ *Le polynôme caractéristique :* $r^2 + 2\alpha r + \omega_o^2 = 0$
▷ *Le discriminant :* $\Delta' = \alpha^2 - \omega_o^2 = (\alpha + \omega_o)(\alpha - \omega_o) = \omega_o^2(\frac{1}{4\mathbf{Q}^2} - 1)$

4.2.2.1 Régime apériodique

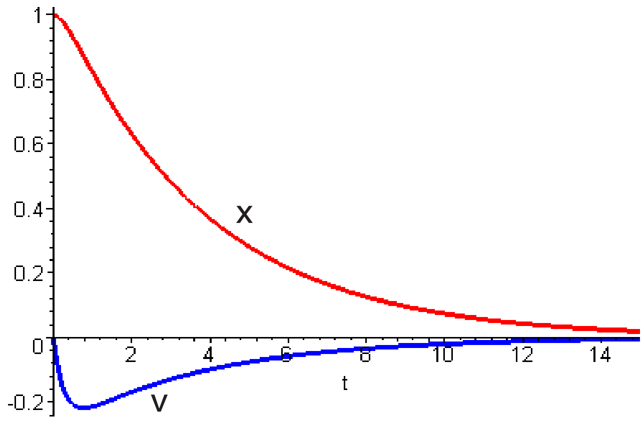
$\Delta' > 0 \Longrightarrow \alpha > \omega_o \Longrightarrow \mathbf{Q} < \frac{1}{2}$
Deux racines réelles distinctes : $r_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$

$$\boxed{x(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} \Longrightarrow x(t) = e^{-\alpha t}[Ae^{\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}t} + Be^{-\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}t}]}$$

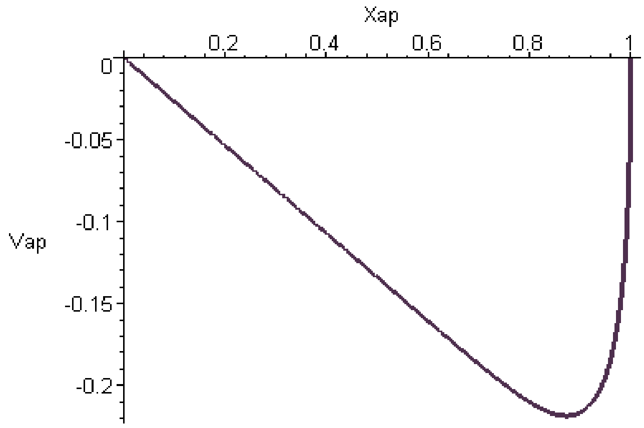
Lorsque $t \to \infty, e^{-\alpha t}$ *l'emporte ;d'où* $x \to 0$ *sans osciller :C'est le régime apériodique.*

Representation graphique

Representation temporelle



Le portrait de phase du régime apériodique



régime apériodique : trajectoire dans le plan de phase est ouverte

4.2.2.2 Régime critique

$\Delta' = 0 \Longrightarrow \alpha = \omega_o \Longrightarrow \mathbf{Q} = \frac{1}{2}$

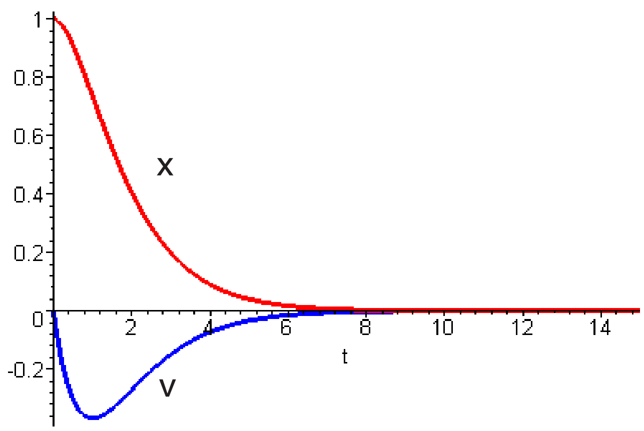
Deux racines réelles confondues : $r_+ = r_- = -\alpha$

$$\boxed{x = (A_c + B_c t)e^{-\alpha t}}$$

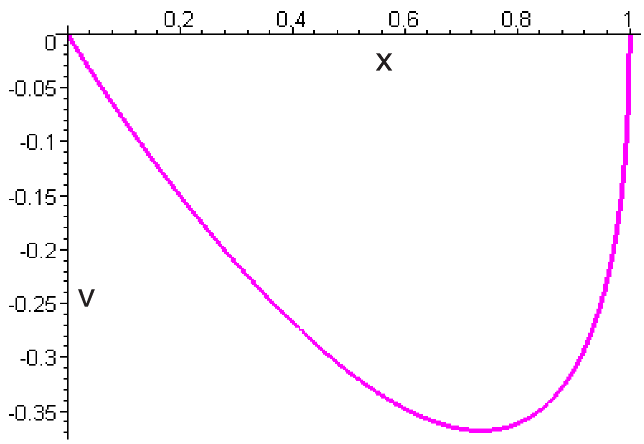
Quand $t \to \infty, x \to 0$ *rapidement sans osciller : C'est le régime critique.*

Representation graphique

Representation temporelle



Le portrait de phase du régime critique



régime critique : trajectoire dans le plan de phase est ouverte

4.2.2.3 Régime pseudo-périodique

$\Delta' < 0 \Longrightarrow \alpha < \omega_o \Longrightarrow \mathbf{Q} > \frac{1}{2}$

$\Delta' = \alpha^2 - \omega_o^2 = i^2\Omega^2$ *avec :*$\Omega^2 = \omega_o^2 - \alpha^2$

Deux racines complexes conjuguées : $r_1 = -\alpha + i\Omega$ *et* $r_2 = -\alpha - i\Omega$ *donc la solution s'écrit :*

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) = x_o e^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi)}$$

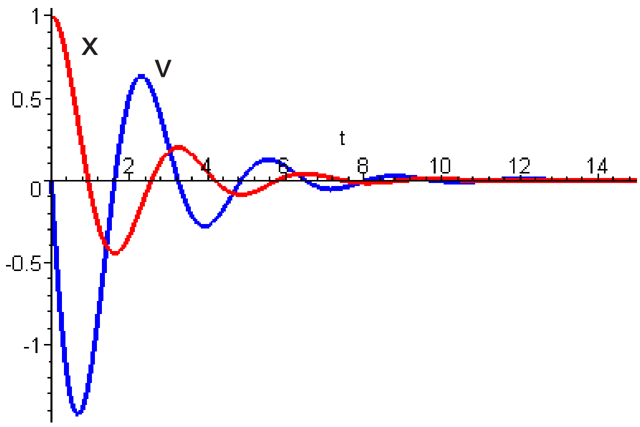
C'est une fonction pseudo-périodique d'amplitude $X_m = x_o e^{-\alpha t}$ *variable en fonction du temps* $X_m \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

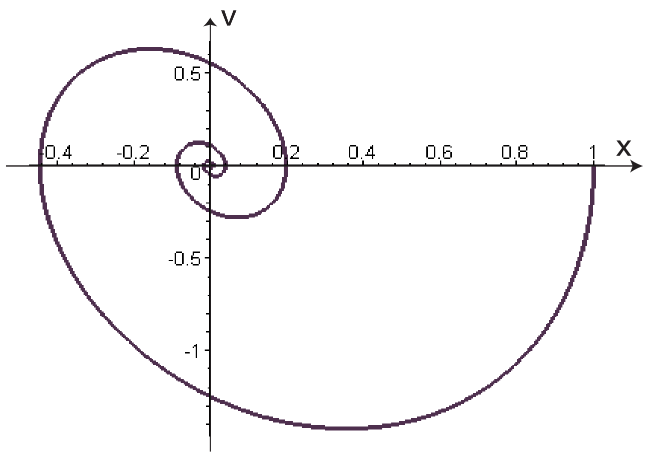
Representation graphique

Representation graphique

Representation temporelle

Le portrait de phase du régime pseudopériodique





Le point O attire toutes les trajectoires dans le plan de phase qui correspond à la position d'équilibre stable

La pseudo-période est :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_o}{\sqrt{1 - (\frac{\alpha}{\omega_o})^2}} = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\mathbf{Q}^2}}}}$$

4.2.3 Decrement logarithmique

on définit le décrement logarithmique par

$$\boxed{\delta = \alpha T}$$

cœfficient sans unité

On a :

- $x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi)$
- $x(t + nT) = Ae^{-\alpha(t+nT)}\cos(\Omega t + n\Omega T + \varphi) = e^{-\alpha nT}x(t)$

D'où :

$$\boxed{\frac{x(t)}{x(t+nT)} = e^{\alpha nT} \Longrightarrow \alpha nT = \ln\frac{x(t)}{x(t+nT)}}$$

On en déduit que

$$\boxed{\delta = \alpha T = \frac{1}{n}\ln\frac{x(t)}{x(t+nT)}}$$

Si $n = 1$ alors :

$$\boxed{\delta = \alpha T = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)}}$$

4.2.4 Interprétation physique

4.2.4.1 Facteur de qualité

Hypothèse : *L'amortissement très faible* $(\alpha \to 0 \Longrightarrow Q \gg 1 \Longrightarrow \omega_o \gg \alpha)$

- $x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi)$
- $\Omega = \omega_o\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} \simeq \omega_o$
- $T = T_o$

D'où : $x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_o t + \varphi)$

- $\mathbf{E}p = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha t}\cos^2(\omega_o t + \varphi)$
- $\mathbf{E}c = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = \dfrac{1}{2}A^2m[-\omega_o e^{-\alpha t}\sin(\omega_o t + \varphi) - \alpha e^{-\alpha t}\cos(\omega_o t + \varphi)]^2$

Or les fonctions $\cos$ *et* $\sin$ *sont bornées ainsi* $\alpha \ll \omega_o$ *donc :*

$\mathbf{E}c \simeq \dfrac{1}{2}mA^2\omega_o^2e^{-2\alpha t}\sin^2(\omega_o t + \varphi)$

-

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha t}}$$

Question : *Que vaut la diminution relative de l'énergie mécanique au cours d'une pseudo-période ,c'est à dire :* $\dfrac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)}$ *?*

- $E_m(t) = \dfrac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha t}$
- $E_m(t+T) = \dfrac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha(t+T)}$

$$\boxed{\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} = 1 - e^{-2\alpha T_o}}$$

Or $\quad \alpha T \simeq \alpha\dfrac{2\pi}{\omega_o} = \alpha T_o \ll 1 \Longrightarrow 1 - e^{-2\alpha T_o} \approx 2\alpha T_o$

D'où :

$$\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} \simeq 2\alpha T_o = \frac{2\alpha 2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\mathbf{Q}}$$

Donc :

$$\boxed{\mathbf{Q} = 2\pi\frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t+T)}}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\mathbf{Q} = 2\pi\frac{\textit{énergie del'oscillateur}}{\textit{énergie perdue pendant une pseudo-période}}}$$

4.2.4.2 Temps de relaxation

(Énoncé voir TD)
Un point matériel M de masse m est mobile sur un axe horizontal Ox , et il est soumis à une force de frottement visqueux de type : $\overrightarrow{R} = -\lambda\overrightarrow{\dot{x}}$. ce point est relié par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k à un point A d'abscisse x_A . on pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$, et on supposera $\alpha \ll \omega_0$

1. *a quoi correspond cette hypothèse ?*
2. *le point A étant supposé fixe, on écarte M de sa position d'équilibre, et on l'abandonne sans vitesse initiale. Calculer l'intervalle de temps τ au bout duquel l'amplitude du mouvement est divisée par e = 2,718.*

Réponses

1. *On a :* $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$. $\alpha \ll \omega_o$*(amortissement trop faible :oscillations isochrones (T=cte).*
2. $v(0) = 0$
   On a : $x = x_o\cos(\Omega t + \varphi)$ *avec* $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \simeq \omega_o$
   Donc : $x = x_o\cos(\omega_o t + \varphi)$
   - *à* $t = 0$ *on a* $\boxed{X_m = x_o\cos\varphi}$.
   - $\dot{x} = x_o e^{-\alpha t}[-\alpha\cos(\omega_o t + \varphi) - \omega_o\sin(\omega_o t + \varphi)]$
   - $v(0) = 0 \Longrightarrow \tan\varphi = -\dfrac{\alpha}{\omega_o} \ll 1 \Longrightarrow \varphi \to 0$
   - $\varphi \to 0 \Longrightarrow x_o = X_m$

   On conclut que : $X_m(t) = x_o e^{-\alpha t} \Longrightarrow X_m(t+\tau) = x_o e^{-\tau\alpha}e^{-\alpha t}$
   Si le rapport des amplitudes est e alors : $\dfrac{x_o e^{-\alpha t}}{x_o e^{-\tau\alpha}e^{-\alpha t}} = e$ *alors :*

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\alpha}}$$

***Définition** :*
`Le temps d'amortissement` τ `correspond au temps nécessaire pour que l'amplitude se divise par` e

4.3 Oscillations forcées -Résonance

Pour maintenir l'amplitude des oscillations constante,il faut fournir une énergie égale à celle perdue par les frottements à l'aide d'une force excitatrice qui impose une fréquence d'où la naissance des oscillations forcées.
prenons l'exemple (masse-ressort)
Appliquons la R.F.D
$\overrightarrow{F}(t) + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a}(M)$
avec : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = -kx\overrightarrow{e_x}$
donc : $-kx - \lambda\dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$
$\Longrightarrow m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$
l'équation canonique est : $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = \dfrac{1}{m}F(t)$
avec :

▶ $2\alpha = \dfrac{\lambda}{m} = \dfrac{\omega_o}{Q} = \dfrac{1}{\tau}$ *: constante d'amortissement*

▶ $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ *: la pulsation propre*

La solution de cette équation différentielle est la somme de deux fonctions :

• *solution de l'équation homogène $x_t(t)$ qui décrit le régime transitoire (disparaît après quelques τ).*

• *solution particulière $x_p(t)$ qui décrit le régime permanent .*

donc $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$ avec :

• *$x_t(t)$ dépend du signe de Δ'*

• *$x_p(t) = X\cos(\omega_p t + \varphi_p)$*

Si $F(t) = F_o\cos(\omega t + \varphi_F)$ alors la solution est ***en régime permanent*** *est : $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi_x)$*

4.3.1 Détermination de l'amplitude X et la phase $\varphi = \varphi_x - \varphi_F$

Pour

• *$x = X\cos(\omega t + \varphi)$ on associe $\underline{x(t)} = Xe^{i(\omega t+\varphi)} = \underline{X}e^{i\omega t}$ avec $\underline{X} = Xe^{i\varphi}$*

Pour $F = F_o\cos(\omega t + \varphi_F)$ on associe $\underline{F} = \underline{F_o}e^{i\omega t}$

• *Pour* $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = \dfrac{F(t)}{m}$ *on associe* $\underline{\ddot{x}} + 2\alpha\underline{\dot{x}} + \omega_o^2\underline{x} = \dfrac{\underline{F}(t)}{m}$

Ce qui donne :$-\omega^2\underline{X} + 2\alpha i\omega\underline{X} + \omega_o^2\underline{X} = \dfrac{\underline{F_o}}{m}$

$$\boxed{\underline{X} = Xe^{i\varphi_x} = \frac{F_o e^{i\varphi_F}/m}{(\omega_o^2 - \omega^2) + 2i\alpha\omega} = f(\omega)}$$

Donc :

• *X représente le module de $f(\omega)$;$X = \mid f(\omega) \mid$*

• *φ_x représente l'argument de $f(\omega)$*

$$\boxed{X = \frac{F_o}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \tan(\varphi_x - \varphi_F) = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}}$$

4.3.2 Étude de la résonance d'amplitude :

On pose :

• $r = \dfrac{\omega}{\omega_o} > 0 \Longrightarrow \omega = r\omega_o$

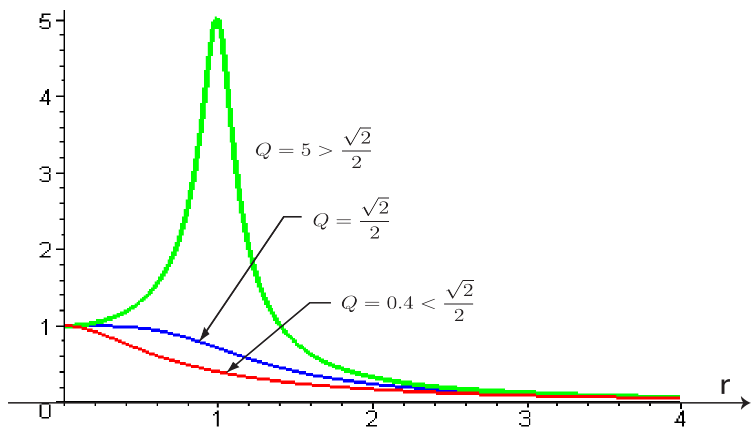
• $X_o = \dfrac{F_o}{m}$

On en déduit que :

$$\boxed{X = \frac{X_o}{\omega_o^2\sqrt{(1 - r^2)^2 + \dfrac{r^2}{Q^2}}} = X(r)}$$

- *Si* $1-\dfrac{1}{2Q^2}\leq 0 \Longrightarrow Q\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *: pas de résonance d'amplitude*
- *Si* $1-\dfrac{1}{2Q^2}> 0 \Longrightarrow Q>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *: on a résonance d'amplitude*

Representation graphique de la fonction $X(r)$ ***pour quelques valeurs de*** Q



4.3.3 Calcul énergétique :

Pour simplifier on choisi $\varphi_F=0$ *donc* $\varphi=\varphi_x$

4.3.3.1 Énergie perdue :

En régime permanent on a : $\delta\mathbf{W}_p=-\lambda\dot{x}dx=-\lambda\dot{x}^2\,dt$

$\delta\mathbf{W}_P=-\dfrac{\lambda^2X^2\omega^2}{2}[1-\cos(2(\omega t+\varphi))]\,dt$

Au cours d'une période on a :

$\mathbf{W}_p=\int_0^T\delta\mathbf{W}_p\Longrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{W}_p=-\frac{\lambda X^2\omega^2T}{2}=-\lambda X^2\pi\omega<0}$$

4.3.3.2 Énergie gagnée :

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{W}_g=F(t)dx=F(t)\dot{x}dt &\Longrightarrow \delta\mathbf{W}_g=-F_o\cos\omega t X\omega\sin(\omega t+\varphi)dt\\ &\Longrightarrow \delta\mathbf{W}_g=-F_o\omega X[\cos\omega t.\sin(\omega t+\varphi)]\\ &\Longrightarrow \delta\mathbf{W}_g=-\frac{F_o\omega Xdt}{2}[\sin(2(\omega t=\varphi))-\sin(-\varphi)]\\ &\Longrightarrow \mathbf{W}_g=-\frac{F_o\omega X}{2}[(\sin\varphi)t-\frac{1}{2\omega}\cos(2(\omega t+\varphi))]_0^T\end{aligned}$$

$\mathbf{W}_g=-F_o\pi X\sin\varphi$

Or : $\underline{X}=Xe^{i\varphi}=\dfrac{X_o}{(\omega^2-\omega^2)+2i\alpha\omega}=\dfrac{X}{e^{-i\varphi}}\Longrightarrow-\dfrac{\sin\varphi}{X}=\dfrac{2\alpha\omega}{X_o}$

Donc

$$\boxed{\mathbf{W}_g=2\pi X^2\omega m\alpha=\pi X^2\omega\lambda>0}$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{W}_g=|\mathbf{W}_p|}$$

ce qui montre que l'énergie perdue par frottement et totalement fournie par la force excitatrice $F(t)$.

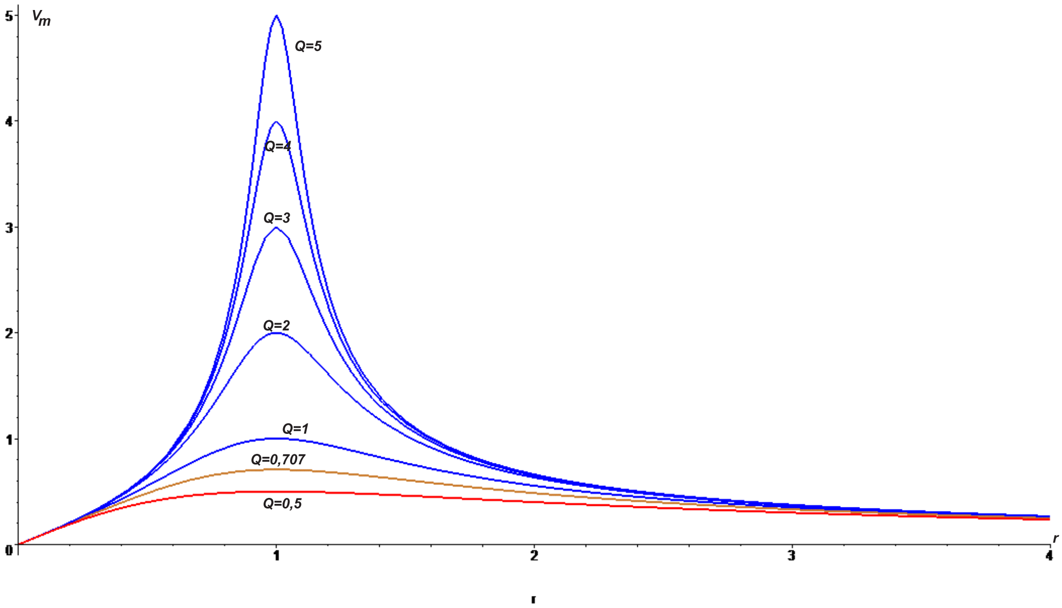
4.3.4 Résonance de vitesse

En régime établi (permanent) on pose $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$ Avec

$$\boxed{V_m = \omega X = \frac{X_o r/\omega_o}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \dfrac{r^2}{Q^2}}}}$$

$$\boxed{\frac{dV_m}{dr} = 0 \Longrightarrow r = 1}$$

Représentation graphique



4.3.5 Bande passante

énoncé voir TD

$x_A = a\cos\omega t$,*l'équation différentielle sera donc :*$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = \dfrac{a}{m}\cos\omega t$
La solution du régime permanent s'écrit :$x = A\cos(\omega t + \varphi)$
En notation complexe :$(-\omega^2 + \omega_o^2) + 2i\alpha\omega_o = a/m$

$A = \dfrac{a/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} = \dfrac{a}{m\omega_o^2}\dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \dfrac{r^2}{Q^2}}}$ *avec* $Q = \omega_o/2\alpha$

$\alpha \ll \omega_o \Longrightarrow Q \to \infty$ *donc*

$A = \dfrac{a}{m\omega_o^2}\dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \dfrac{r^2}{Q^2}}}$: *la résonance aura lieu pour $r = 1$ et par conséquent :*

$A_m = \dfrac{a}{m\omega_o^2}Q = \dfrac{a\omega_o}{2m\omega_o^2\alpha} \Longrightarrow \boxed{A_m = \dfrac{a}{2m\alpha\omega_o}}$

La bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ *est telle que :* $A > \dfrac{A_m}{\sqrt{2}} \Longrightarrow A^2 > \dfrac{A_m^2}{2}$

- $\omega^4 - 2\omega^2(\omega_o^2 - 2\alpha^2) + \omega_o^4 - 8\alpha^2\omega_o^2 = 0$
- $\Delta' = 4\alpha^2\omega_o^2$
- $\omega^2 = (\omega_o^2 - 2\alpha^2) \pm 2\alpha\omega_o \simeq \omega_o^2 \pm 2\alpha\omega_o = \omega_o^2(1 \pm \dfrac{1}{Q})$
- $\omega_2 = \omega_o(1 + \dfrac{1}{Q})^{1/2} = \omega_o(1 + \dfrac{1}{2Q})$
- $\omega_1 = \omega_o(1 - \dfrac{1}{Q})^{1/2} = \omega_o(1 - \dfrac{1}{2Q})$
- $\Delta\omega = \dfrac{\omega_o}{Q} = 2\alpha = \dfrac{2}{\tau}$

Donc le résultat fondamental

$$\boxed{\Delta\omega.\tau = 2}$$

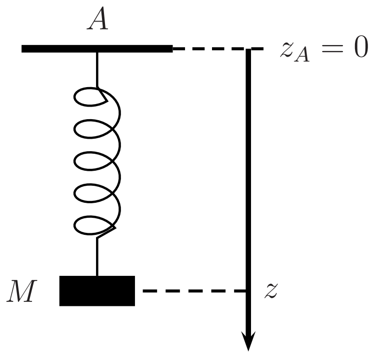
$$\boxed{Q = \frac{\omega_o}{\Delta\omega}}$$

4.4 Analogie :Electrique/Mécanique

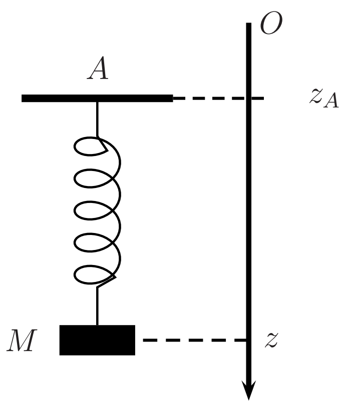
Grandeur électrique	Grandeur mécanique
$L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{1}{C}q = e(t)$	$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$
L	m
λ	R
C	$1/k$
q	x
i	v
$e(t)$	$F(t)$
$\dfrac{1}{2}Li^2$	$\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$
$\dfrac{1}{2C}q^2$	$\dfrac{1}{2}kx^2$
$\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$	$Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda}$

Application : :***Le pendule élastique***

On considère une masse M homogène de masse volumique ρ *et de volume* V*, plongée dans l'eau (masse volumique* ρ_e*). Cette masse est suspendue a un ressort de raideur* k *et de longueur à vide* l_o*, accroché en un point A .*
Soit (Oz) un axe vertical oriente vers le bas, le point A est fixe à la cote z_A *= 0. On s'interesse au mouvement suivant (Oz) de la masse et on note* z *la cote du centre de gravite G de la masse. A l'équilibre la masse est située en* $z = h$*. On négligera la hauteur de la masse M devant* h*. Soit* $\mathcal{R}$*le référentiel terrestre suppose galiléen.*



***1**- Écrire la condition d'équilibre de la masse M dans $\mathcal{R}$.*
***2**- En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'oscillation de M. On écrira une équation reliant z et ses dérivées, M, k et h. Donner la pulsation propre ω_o de cet oscillateur. On négligera les frottements dans cette question.*
***3**- Commenter le fait que ω_o ne dépende pas de l'intensité de la poussée d'Archimède. Y a-t-il un terme de l'équation différentielle précédente qui en dépende ?*
***4**- On tient compte d'une force de frottement visqueux, colinéaire à la vitesse et d'intensité $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{V}$ (identique dans tous les référentiels) de l'eau sur la masse M. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par z. En se plaçant dans le cas d'un amortissement faible, donner sans calcul l'allure de la fonction $z(t)$ avec les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, $z = h_1 > h$ et la vitesse initiale est nulle.*
***5**- A l'aide d'un piston, on impose à l'extremite A du ressort, un mouvement vertical sinusoidal d'amplitude z_{Am} ; donc $z_A(t) = z_{Am}cos(\omega t)$. Écrire dans le référentiel $\mathcal{R}$' , lie à A, l'équation différentielle vérifiée par z' cote de G dans $\mathcal{R}$'.*
***6**- Calculer l'amplitude des oscillations de la masse M dans $\mathcal{R}$' . On utilisera la notation complexe et on fera apparaître les constantes ω_o,$\tau = \dfrac{M}{\alpha}$ et la variable $x = \dfrac{\omega}{\omega_o}$*
***7**- Dans ce dispositif, l'intérêt du ressort est de permettre d'obtenir des oscillations de la masse d'amplitude supérieure à celle de l'excitation. Chercher un intervalle de pulsations pour lequel cette condition est vérifiée. Vous montrerez que cet intervalle existe si la masse M est supérieure à une certaine valeur que vous préciserez.*
***8**-Si la condition précédente est vérifiée, pour quelle pulsation l'amplitude d'oscillation de la masse M est-elle maximale ?*



Réponses

1- La condition d'équilibre de la masse M dans $\mathcal{R}$.

$$\boxed{Mg = F_A + k(h - l_o)}$$

2- L'équation différentielle du mouvement de l'oscillation de M.
On projette la RFD sur l'axe Oz on obtient :

$$M\ddot{z} = Mg - \alpha\dot{z} - F_A - k(z - l_o) = Mg - \alpha\dot{z} - F_A - k(z - h) - k(h - l_o)$$

La condition d'équilibre donne

$$\boxed{M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z - h) = 0}$$

La pulsation propre $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

3- ω_o *ne dépend que des paramètres intrinsèque du système*
Le terme de l'équation différentielle précédente qui en dépend est h *la position d'équilibre*
En général toute forces constantes n'apparaissent pas dans l'équation différentielle, son rôle est de modifier la position d'équilibre
4- La nouvelle équation différentielle vérifiée par z.

$$\boxed{M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z - h) = 0 \Longrightarrow \ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_o^2(z - h) = 0}$$

Avec $\lambda = \dfrac{\alpha}{2M} \ll \omega_o$ *amortissement faible*
dans ce cas la solution est de la forme :

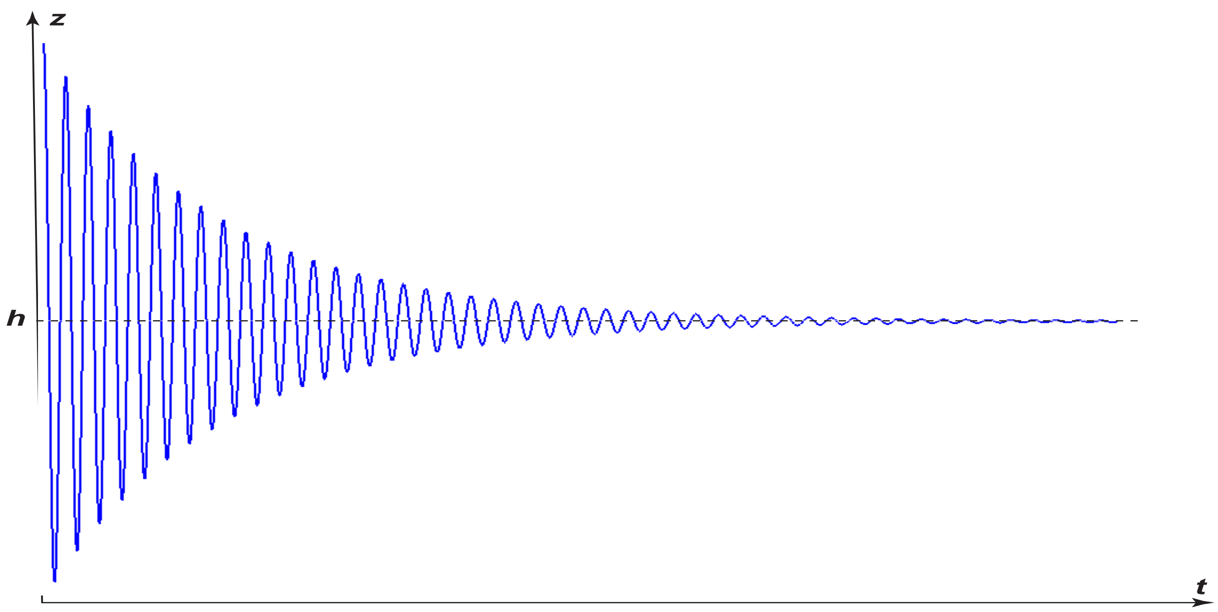
$$z(t) = h + Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) \qquad \Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$$

A *et* φ *deux constantes d'intégration à déterminer par les C.I.*
Comme $\lambda \ll \omega_o \Longrightarrow \Omega \simeq \omega_o$ *ainsi :*

- $z(t = 0) = h_1 \Longrightarrow h_1 = h + A\cos\varphi$
- $\dot{z}(t = 0) = 0 \Longrightarrow \tan\varphi = -\dfrac{\lambda}{\omega_o} \to 0$ *c'est à dire* $\varphi \to 0$ *On en déduit que*

$$\boxed{z(t) = h + (h_1 - h)e^{-\lambda t}\cos\omega_o t}$$

Représentation graphique de $z(t)$ *pour* $h = 5$,$h_1 = 6$, $\lambda = 0.2$ *et* $\omega_o = 10$



***5**- L'équation différentielle.*

$$\boxed{M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z-h) = kz_A}$$

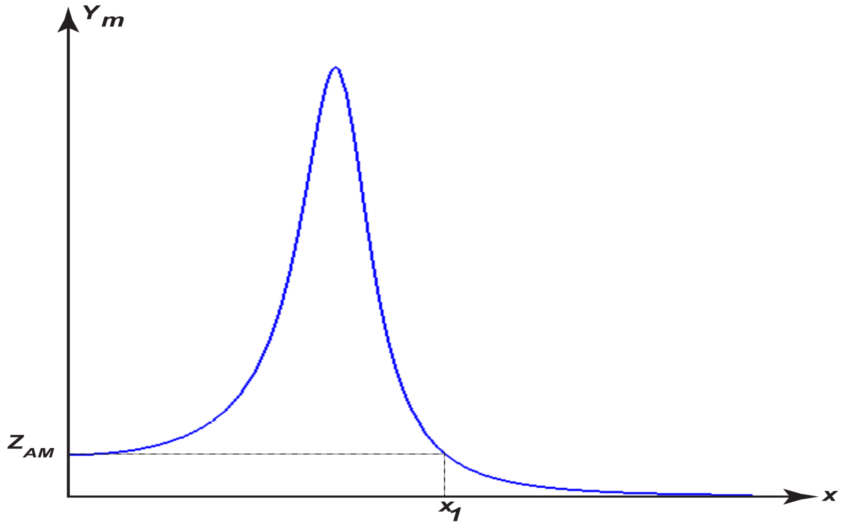
En posant $y = z - h$ *on obtient*

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{1}{\tau}\dot{y} + \omega_o^2 y = \omega_o^2 Z_{AM}\cos\omega t}$$

***6**- On cherche une solution qui décrit le régime permanent sous la forme* $y(t) = Y_m\cos(\omega t + \varphi)$ *et en notation complexe on trouve*

$$\boxed{Y_m = \frac{Z_{AM}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{\tau^2\omega_o^2}}}}$$

La représentation graphique de X_M *en fonction de la pulsation réduite* x



***7**- L' intervalle de pulsations est* $[0, \omega_1 = x_1\omega_o]$. *telle que* $Z_{AM} = Y_M$ *c'est à dire* x_1 *solution de*

$$\boxed{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{\tau^2\omega_o^2} = 1}$$

La solution est

$$x_1^2 = 2 - \frac{1}{\tau^2\omega_o^2}$$

Si $2 - \dfrac{1}{\tau^2\omega_o^2} > 0 \Longrightarrow M > \dfrac{\alpha^2}{2k} = M_c$ *alors*

$$\boxed{\omega_1 = \omega_o\sqrt{2 - \frac{1}{\tau^2\omega_o^2}}}$$

***8**-L'amplitude d'oscillation de la masse M est maximale si* $\dfrac{dY_M}{dx} = 0$

$$\boxed{\omega_R = \omega_o\sqrt{1 + \frac{1}{2\tau^2\omega_o^2}}}$$

Chapitre 5

Théorème du moment cinétique

5.1 Le moment cinétique ,moment d'une force

5.1.1 Définition

• *On appelle moment cinétique en un point O,par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$d'un point matériel M le vecteur :*

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = \overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}(M) \qquad (kg.m^2/s)}$$

• *On appelle moment d'une force en un point O,par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$d'une force $\overrightarrow{F}$ appliqué en un point M le vecteur :*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_o} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \qquad (m.N)}$$

5.1.2 Théorème du moment cinétique

Soit O un point fixe d'un référentiel $\mathcal{R}$.
Calculons la dérivée temporaire par rapport au référentiel $\mathcal{R}$du moment cinétique.

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} \wedge m\overrightarrow{V}(M) + \overrightarrow{OM} \wedge m\left.\frac{d\overrightarrow{V}(M)}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{a}(M)$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \Sigma\overrightarrow{F}$$

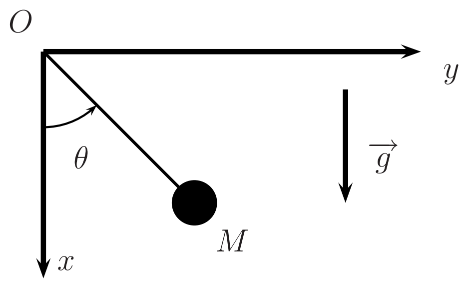
$$\Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F})$$

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F})}$$

c'est le théorème du moment cinétique avec O un point fixe

5.2 Applications

5.2.1 pendule simple



On a :

- $\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{e_r} \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$
- $\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = ml^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ *donc*

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

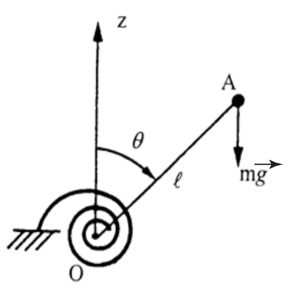
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{P}) = -mgl\sin\theta\overrightarrow{e_z}$

On tire donc que

$$\boxed{l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

5.2.2 Pendule de HOLWECK LEIAY

Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, de longueur ℓ= OA, articulée en un point fixe O et mobile dans un plan vertical; un ressort spiral exerce sur cette tige un couple de rappel $-C\theta$, où θ désigne l'angle que fait la tige avec la verticale ascendante Oz. On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur.



1- Le système étant conservatif et à un degré de liberté , former l'expression de l'énergie mécanique totale du système.
L'expression précédente est une constante du mouvement ou intégrale première.
2- En déduire l'équation du mouvement.
3- En considérant θ comme petit, à quelle condition la position $\theta = 0$ correspond elle à un équilibre stable d'un oscillateur harmonique ?

4- Cette condition étant supposée réalisée, calculer la période T des petites oscillations que l'on écrira sous la forme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{A-g}}$$

en donnant l'expression de A.
5- Calculer la variation relative de la période $\frac{\Delta T}{T}$ correspondant à une petite variation g de l'intensité du champ de pesanteur. Montrer que cet appareil peut être rendu plus sensible qu'un pendule simple, dont on appellera $\frac{\Delta T_0}{T_0}$ la précision sur la mesure de la période T_0 des petites oscillations.

Chapitre 6

Mouvements dans un champ de forces centrales conservatives, mouvement newtonien

6.1 Généralités sur les forces centrales

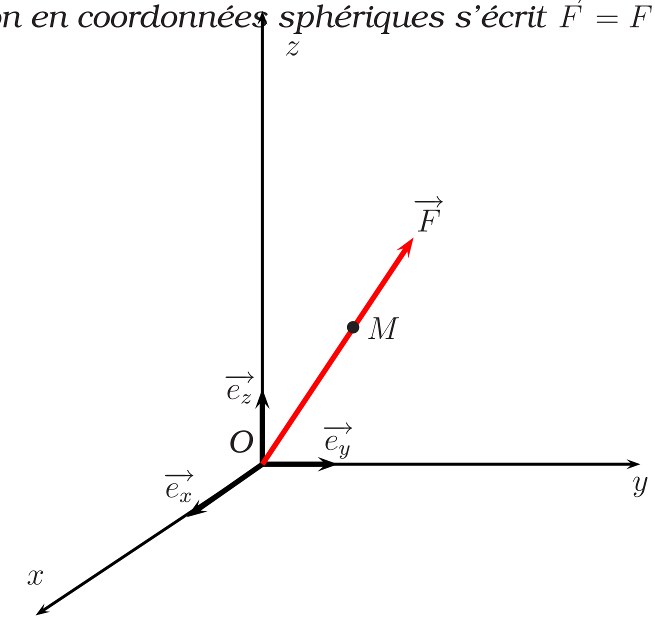
6.1.1 Définition

On appelle force centrale une force $\overrightarrow{F}$ dont la direction passe toujours par un point fixe O.

Exemple *:*

- *Tension du ressort.*
- *Force gravitationnelle :* $\overrightarrow{F} = -\frac{GmM}{r^2}\overrightarrow{e_r}$
- *Force coulombienne :* $\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$
- *La tension du fil dans le pendule simple.*

Son expression en coordonnées sphériques s'écrit $\overrightarrow{F} = F(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r}$ *avec* $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$



6.1.2 Moment cinétique, Loi des aires

6.1.2.1 Conservation du moment cinétique

*Appliquons le TMC en O point fixe dans $\mathcal{R}$**supposé galiléen***

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}) \Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = r\overrightarrow{e_r} \wedge F\overrightarrow{e_r}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{O}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = \overrightarrow{cte}}$$

On conclut que le moment cinétique d'une force centrale est conservatif

6.1.2.2 Planéité de la trajectoire

On a $\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{cte}$ donc le mouvement est plan : ***C'est la première loi de Kepler***
On choisit les coordonnées cylindriques avec

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = \sigma_o\overrightarrow{e_z}}$$

Par conséquent :

- *Le vecteur position :*$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$
- *La vitesse :*$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$
- *L'accélération :* $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$
- *Le moment cinétique :* $\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$

D'où

$$\boxed{\sigma_o = mr^2\dot{\theta} = m\mathcal{C}}$$

Avec

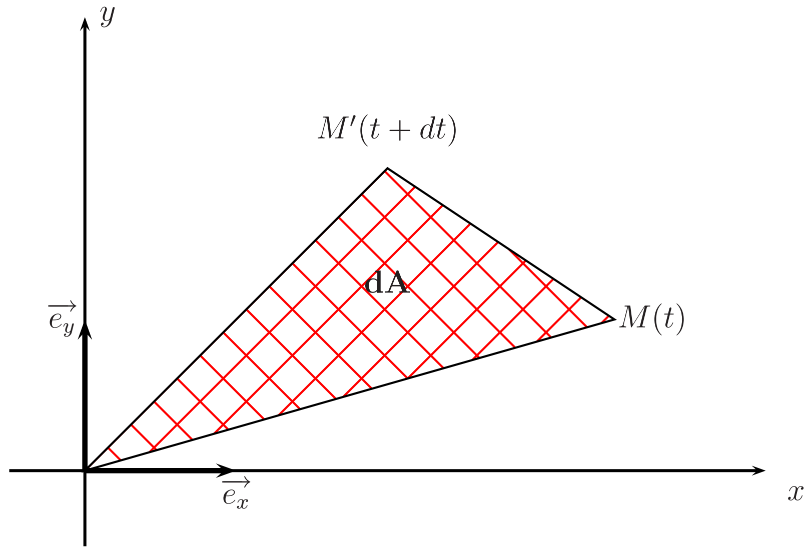
$$\boxed{\mathcal{C} = r^2\dot{\theta} = \frac{\sigma_o}{m}}$$

Constante des aires

Remarque- 14 :
Si $\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \dot{\theta} = 0$ c'est à dire que le mouvement se fait dans la direction de $\overrightarrow{e_r}$: C'est un mouvement rectiligne

6.1.2.3 Vitesse aréolaire , Loi des aires

Déterminons dA l'aire (surface) élémentaire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre les instants t et $t + dt$



On a :
$dA = \frac{1}{2} \parallel \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM} \parallel \Longrightarrow dA = \frac{1}{2} \parallel r\overrightarrow{e_r} \wedge (dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta}) \parallel$

$$\boxed{dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta}$$

On définit la vitesse aréolaire $\frac{dA}{dt}$ *comme la surface balayée par le vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *pendant l'unité de temps*

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{\mathcal{C}}{2} = \frac{\sigma_o}{2m} = cte}$$

Conclusion :
:Loi des aires (deuxième loi de Kepler)
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ***balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux.***

6.1.3 Formules de Binet

On a :
- $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2.$
- *On pose :* $u = \frac{1}{r} \Longrightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$
- $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = (\frac{dr}{du})(\frac{du}{d\theta})(\frac{d\theta}{dt}) = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = -\mathcal{C}\frac{du}{d\theta}}$$

Donc

$$\boxed{V^2 = \mathcal{C}^2[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2]}$$

C'est la première loi de Binet

De même on a : $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$
Or :

$$\boxed{a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d\mathcal{C}}{dt} = 0}$$

- $\ddot{r} = \dfrac{d}{dt}[-\mathcal{C}\dfrac{du}{d\theta}] = -\mathcal{C}\dfrac{d}{d\theta}(\dfrac{du}{d\theta})\dfrac{d\theta}{dt} = -\mathcal{C}^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$
- $r\dot{\theta}^2 = r\dfrac{\mathcal{C}^2}{r^4} = \mathcal{C}^2u^3$

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = -\mathcal{C}^2u^2(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u)\overrightarrow{e_r}}$$

C'est la deuxième loi de Binet

Application : *: Déterminer la lois de forces centrales* $F(r)$ *lorsque :*
- $r = k\exp\theta$
- $r = k\theta$

6.2 Forces centrales conservatives

On suppose que la force centrale $\overrightarrow{F}$ *est conservative c'est à dire qu'il existe une énergie potentielle* $\mathbf{E}p$ *tel que*

$$\boxed{d\mathbf{E}p = -\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} \Longrightarrow d\mathbf{E}p = -F_r dr}$$

On en déduit que l'énergie potentielle ne dépend que de la distance r *elle ne dépend ni de* θ *ni de* φ

$$\boxed{\mathbf{E}p(r) = \int F(r)dr + cte}$$

Par conséquent : $E_m = \mathbf{E}c + \mathbf{E}p \Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \mathbf{E}p(r)$

Or :$\dot{\theta} = \dfrac{\sigma_o}{m} = \dfrac{\mathcal{C}}{r^2}$ *par conséquent :*

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\sigma_o^2}{2m}\frac{1}{r^2} + \mathbf{E}p(r)}$$

On pose :
- ▶ $\mathbf{E}c_r = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2$ *: l'énergie cinétique radiale.*
- ▶ $\mathbf{E}p_{eff}(r) = \dfrac{\sigma_o^2}{2m}\dfrac{1}{r^2} + \mathbf{E}p(r)$ *: l'énergie potentielle effective (ou efficace).*

Puisque le système est conservatif alors :

$$\boxed{E_m = cte = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\sigma_o^2}{2m}\frac{1}{r^2} + \mathbf{E}p(r) = E^o}$$

C'est l'intégrale première de l'énergie

Remarque- 15 :

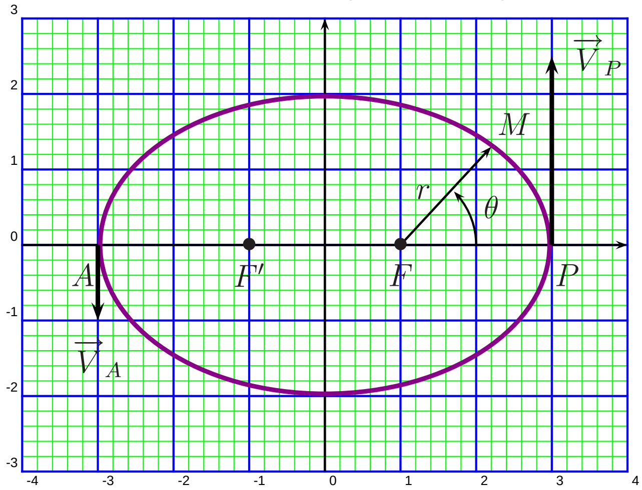
1.

$$\boxed{\mathbf{E}c_r = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geqslant 0 \Longrightarrow E_m \geqslant \mathbf{E}p_{eff}}$$

2. $\mathbf{E}c_r = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0 \Longrightarrow \dot{r} = 0$ *c'est à dire que* r *est extremum.*
   ▶ *Pour une trajectoire circulaire* $r = R \Longrightarrow \mathbf{E}c_r = 0$ *c'est à dire*

$$\boxed{E_m(circulaire) = \mathbf{E}p_{eff} = E^o}$$

   ▶ *Pour une trajectoire elliptique avec origine au foyer*



On a au points :
▶ P *appelé périgée (le point le plus proche au foyer origine) :*

$$r_P = r_{min} \Longrightarrow \dot{r}_P = 0$$

▶ A *appelé apogée (le point le plus éloigné du foyer origine :*

$$r_A = r_{max} \Longrightarrow \dot{r}_A = 0$$

Comme $\overrightarrow{V} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ *alors*

$$\boxed{V_A = r_A\dot{\theta}_A \qquad ; \qquad V_P = r_P\dot{\theta}_P}$$

Relation entre V_A *et* V_P
Comme $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta} = r(r\dot{\theta})$ *alors*

$$\boxed{r_AV_A = r_PV_P}$$

6.3 Cas du champ newtonien

6.3.1 L'approche énergétique

On suppose que la force est newtonnienne c'est à dire :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$$

▶ *Si $\overrightarrow{F}$ est attractive (interactions gravitationnelle ou coulombienne entre deux charges de signe contraire) alors* $\alpha > 0$

▶ *Si $\overrightarrow{F}$ est repulsive (interactions coulombienne entre deux charges de même signe) alors* $\alpha < 0$

L'énergie potentielle est donc avec référence à l'infini

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e_r} \Longrightarrow \mathbf{E}p(r) = -\frac{\alpha}{r}}$$

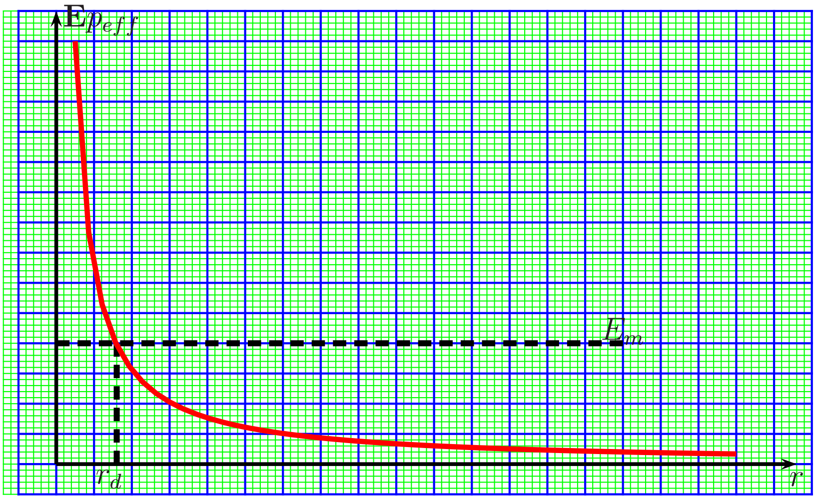
Remarque- 16 :

Le signe de l'énergie potentielle :

- *Si $\overrightarrow{F}$ est attractive alors* $\mathbf{E}p(r) < 0$
- *Si $\overrightarrow{F}$ est repulsive alors* $\mathbf{E}p(r) > 0 \Longrightarrow \mathbf{E}p_{eff} > 0$

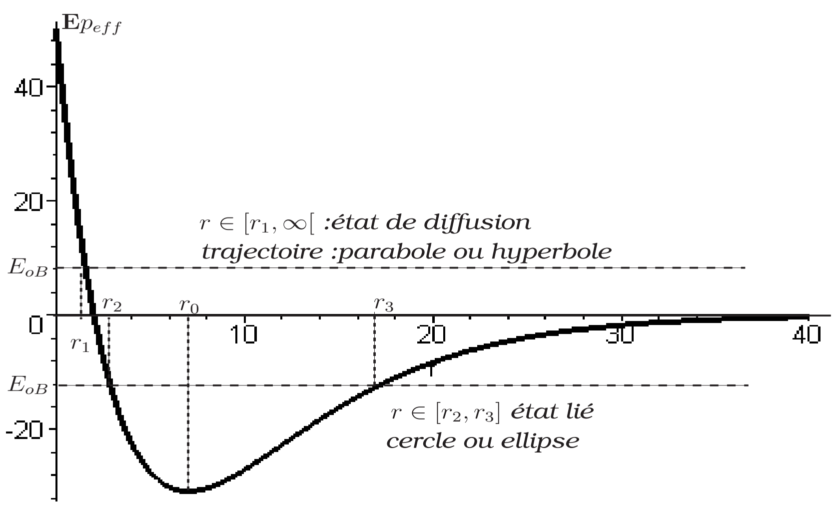
Représentation de l'énergie potentielle effective

Cas ou $\overrightarrow{F}$ est repulsive



$$\boxed{r \geqslant r_d \Longrightarrow \textbf{\textit{état de diffusion}}}$$

Cas ou $\overrightarrow{F}$ est attractive



- $\mathbf{E}p_{eff} = 0 \Longrightarrow r = \dfrac{\sigma_o^2 m}{2\alpha}$
- $\dfrac{d\mathbf{E}p_{eff}}{dr} = 0 \Longrightarrow r = \dfrac{\sigma_o^2 m}{\alpha}$
- $\dfrac{d^2\mathbf{E}p_{eff}}{dr^2} = 0 \Longrightarrow r = \dfrac{3\sigma_o^2 m}{2\alpha}$

6.3.2 L'équation de la trajectoire

6.3.2.1 Relation fondamentale de la dynamique

On a : $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}(M)$ *or :*
$\overrightarrow{F} = -\dfrac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\alpha < 0 \Longrightarrow$ *repulsion* $(q_1.q_2 > 0)$
- $\alpha > 0 \Longrightarrow$ *attraction :soit* $(q_1.q_2 < 0)$ *soit gravitation.*

On sait que : $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta} = \dfrac{\sigma_o}{m}$ *ainsi :* $\overrightarrow{a}(M) = -\mathcal{C}^2u^2(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u)\overrightarrow{e_r}$
donc : $-m\mathcal{C}^2u^2(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u) = -\dfrac{\alpha}{r^2} = -\alpha u^2$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = +\frac{\alpha}{m\mathcal{C}^2} = \frac{\alpha m}{\sigma_o^2}}$$

La solution de cette équation est :
$u = A\cos(\theta - \theta_o) + \dfrac{\alpha m}{\sigma_o^2}$ *avec* A *et* θ_o *sont des constantes déterminées par les conditions initiales.*
Cette solution peut s'écrire :

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\alpha m}{\sigma_0^2}(1 + \frac{A\sigma_0^2}{\alpha m}\cos(\theta - \theta_o))$$

On pose :

$$\boxed{p = |\frac{\sigma_0^2}{\alpha m}| \quad \| \quad e = |\frac{A\sigma_0^2}{\alpha m}|}$$

C'est l'équation d'une ***conique*** *avec :*
- $a = \dfrac{p}{|1 - e^2|}$ • $b = \sqrt{ap}$ • $c = ea$

6.3.2.2 Vecteur Range-Lenz

On définit le vecteur de Range-Lenz par pour une force centrale de forme $\overrightarrow{F} = -\dfrac{\alpha}{r^2}$ *par*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{1}{\alpha}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})) - \overrightarrow{e_r}}$$

Montrons que ce vecteur est constant au cours du temps ,pour cela calculons $\dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{A}}}{dt}$ *:*

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{1}{\alpha}[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})] - \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{1}{\alpha}[-\frac{\alpha}{mr^2}\overrightarrow{e_r} \wedge m\mathcal{C}\overrightarrow{e_z}] - \frac{\mathcal{C}}{r^2}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{\mathcal{C}}{r^2}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{\mathcal{C}}{r^2}\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{1}{\alpha}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R})) - \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{cte}}$$

La constante est déterminée par les conditions initiales ou des conditions particulières.
Sachant que :

- $\overrightarrow{V} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ *et* $\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathbf{R}) = m\mathcal{C}\overrightarrow{e_z}$ *alors*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{A}} = (\frac{m\mathcal{C}^2}{\alpha r} - 1)\overrightarrow{e_r} - \frac{m\mathcal{C}}{\alpha}\dot{r}\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{cte}}$$

Remarque- 17 *:*
les conditions particulières
Si $\dot{r} = 0$ *c'est à dire* r *est extrémale alors* $\overrightarrow{\mathbf{A}}//\overrightarrow{e_r}$

On pose

$$\boxed{e = \|\overrightarrow{\mathbf{A}}\| \geqslant 0}$$

Donc calculons e^2 *au lieu de* e *:*

$e^2 = (\frac{m\mathcal{C}^2}{\alpha r} - 1)^2 + (\frac{m\mathcal{C}}{\alpha}\dot{r})^2$

$\Longrightarrow e^2 = \frac{2m\mathcal{C}^2}{\alpha^2}[\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}] + 1$

Or $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$
on tire que :

$$\boxed{e^2 - 1 = \frac{2m\mathcal{C}^2}{\alpha^2}E_m \Longrightarrow E_m = \frac{\alpha^2}{2m\mathcal{C}^2}(e^2 - 1) = \frac{m\alpha^2}{2\sigma_o^2}(e^2 - 1)}$$

Calculons la quantité $\overrightarrow{\mathbf{A}}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathbf{A}}.\overrightarrow{r}$ *:*

$\overrightarrow{\mathbf{A}}.\overrightarrow{OM} = (\frac{m\mathcal{C}^2}{\alpha r} - 1)r = er\cos\theta \Longrightarrow r = \frac{m\mathcal{C}^2}{\alpha} + er\cos\theta$

$$\boxed{r = \frac{\frac{m\mathcal{C}^2}{\alpha}}{1 + e\cos\theta}}$$

C'est l'équation d'une conique de paramètre

$$\boxed{p = \frac{m\mathcal{C}^2}{|\alpha|}}$$

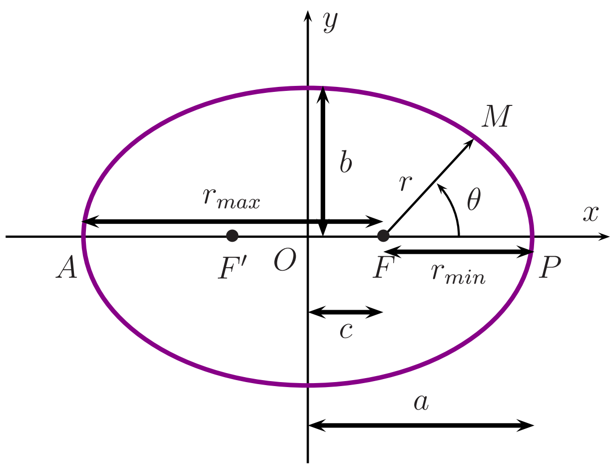
Et d'excentricité

$$\boxed{e = \|\overrightarrow{\mathbf{A}}\|}$$

Discussion

- *Si* $e = 0 \Longrightarrow A = cte = 0 \Longrightarrow E_m < 0$ *: trajectoire circulaire*
- *Si* $0 < e < 1 \Longrightarrow E_m < 0$ *: trajectoire elliptique*
- *Si* $e = 1 \Longrightarrow E_m = 0$ *: trajectoire parabolique*
- *Si* $e > 1 \Longrightarrow E_m > 0$ *: trajectoire hyperbolique*

Remarque- 18 *:*
Pour une trajectoire elliptique



- *En coordonnées cartésiennes son équation (avec) est :*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Avec si $a > b$ *:*

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad ; \qquad c = ea \qquad ; \qquad p = \frac{b^2}{a} \Longrightarrow b = \sqrt{ap}$$

- *En coordonnées polaire s son équation* ***avec origine au foyer F****est :*

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

Avec

$$\boxed{0 < e < 1}$$

- *Apogée* $(\dot{r} = 0)$ *:* $r_{max} = \dfrac{p}{1-e}$
- *Périgée* $(\dot{r} = 0)$ *:* $r_{min} = \dfrac{p}{1+e}$
- *Grand axe* a *:* $r_{min} + r_{max} = 2a \Longrightarrow a = \dfrac{p}{1-e^2}$
- *Petit axe* b *:* $b = \sqrt{ap} \Longrightarrow b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

6.3.2.3 L'étude de quelques trajectoires

6.3.2.3.1 Trajectoire circulaire .

C'est l'exemple des satellites autour de la terre.

La R.F.D dans le repère de Fresnet donne : $\frac{GM_T m_s}{r^2} = m_s \frac{V^2}{r}$ *donc :*

- *La vitesse :*

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}}$$

- *La période :*

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}}$$

- *L'énergie mécanique :* $E_m = \mathbf{E}c + \mathbf{E}p \Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM_T}{r}$ *ce qui donne*

$$\boxed{E_m = -\frac{GmM_T}{2r} = -\frac{\alpha}{2r}}$$

6.3.2.3.2 Trajectoire elliptique .

C'est l'exemple des planètes autour du soleil.

- *L'énergie mécanique :* $E_m = \mathbf{E}c + \mathbf{E}p \Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\mathcal{C}^2}{2}\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$ *Pour* $\dot{r} = 0$ *on a deux solutions* r_{min} *et* r_{max} *qui sont solutions de l'équation*

$$E_m = \frac{m\mathcal{C}^2}{2}\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r} \Longrightarrow E_m r^2 + \alpha r - \frac{m\mathcal{C}^2}{2} = 0$$

La somme des solutions de cette équation du second ordre donne

$$r_{min} + r_{max} = 2a = -\frac{\alpha}{E_m}$$

Donc

$$\boxed{E_m = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{GmM}{2a}}$$

L'énergie mécanique est inversement proportionnel au grand axe de l'ellipse

- *La période du mouvement :*

On rappelle que $p = \frac{m\mathcal{C}^2}{\alpha}$ *et* $b = \sqrt{ap}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{\mathcal{C}}{2} \Longrightarrow A = \frac{\mathcal{C}}{2}T = \pi ab$

donc :

$\frac{\mathcal{C}^2}{4}T^2 = \pi^2 a^2 b^2 \Longrightarrow T^2 = \frac{4}{\mathcal{C}^2}\pi^2 a^3 p$

Or $\alpha = GmM$ *on tire que*

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \Longrightarrow \frac{T^2}{a^3} = cte}$$

C'est la troisième loi de Kepler

Remarque- 19 :
On trouvé que :

	Orbite circulaire	*Orbite elliptique*
L'énergie mécanique	$-\dfrac{GmM}{2R}$	$-\dfrac{GmM}{2a}$
La période	$\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{GM}R^3}$	$\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{GM}a^3}$

Donc pour retrouver les expressions de l'énergie mécanique et la période du mouvement elliptique à partir du mouvement circulaire , il suffit de remplacer le rayon R par le grand axe de l'ellipse a

6.3.2.3.3 Vitesse de liberation .

C'est la vitesse qu'il faut fournir à un objet depuis la terre pour qu'il s'échappe de l'attraction terrestre.
Son orbite doit être parabolique ou hyperbolique c'est dire son $E_m \geqslant 0$
Or $E_m = \dfrac{1}{2}mV_o^2 - \dfrac{GmM_T}{R_T} \geqslant 0 \Longrightarrow V_o \geqslant \sqrt{\dfrac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_oR_T}$

$$\boxed{V_\ell = \sqrt{2g_oR_T} = 11,3\ km/s = 40,7.10^3\ km/h}$$

6.3.2.3.4 Rayon de la trajectoire circulaire d'un satellite géostationnaire

Un satellite est dit géostationnaire s'il a la même période de rotation T que la terre sur elle même $T = 24_{,}h = 86400\ s$
On a $V = R\omega = \dfrac{2\pi R}{T} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R}}$

$$\boxed{R = \left[\frac{T^2GM_T}{4\pi^2}\right]^{1/3}}$$

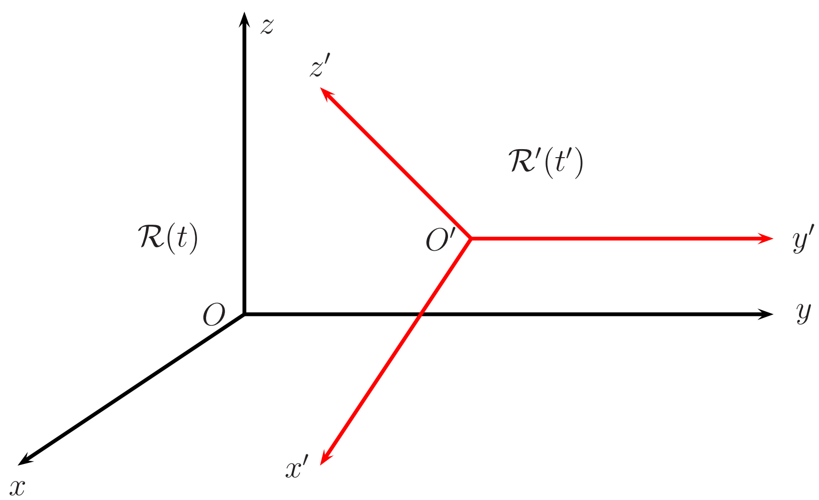
A.N : $R = 42300\ km = 6,6\ R_T$
Donc sa hauteur $h = R - R_T = 36000\ km = 5,6\ R_T$

Chapitre 7

Mécanique dans un référentiel non galiléen

7.1 Introduction

Soient $\mathcal{R}(Oxyzt)$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}'(O'x'y'z't')$ un autre référentiel en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.



• *$\mathcal{R}$ = repère fixe dit repère absolu.*
• *$\mathcal{R}'$ = repère en mouvement dit repère relatif.*
On rappelle que en mécanique classique ,le temps est absolu c'est à dire ne dépend pas du référentiel et par conséquent

$$\boxed{t_{\mathcal{R}} = t_{\mathcal{R}'} = t \Longrightarrow dt_{\mathcal{R}} = dt_{\mathcal{R}'} = dt}$$

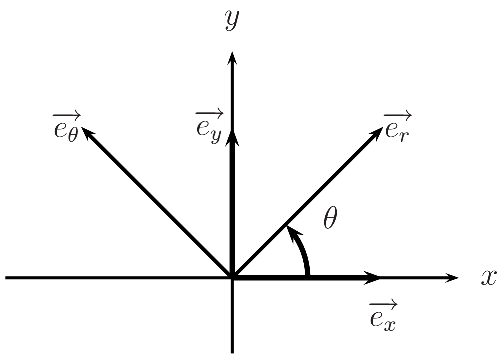
Dans la suite on s'interresse aux mouvements relatifs :
• ***Translation*** *: Les axes de $\mathcal{R}'$ restent constamment parallèle à ceux de $\mathcal{R}$.*
• ***Rotation uniforme*** *: autour d'un axe.*

7.2 L'étude cinématique

7.2.1 Axe instantané de rotation

7.2.1.1 L'étude d'un exemple

En coordonnées cylindriques le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ ainsi $\overrightarrow{e_\theta}$ tourne autour de l'axe oz d'un angle θ dans le sens direct



Que vaut $\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'}$ *et* $\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}$ *ainsi* $\left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'}$ *et* $\left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}$ *?*

- $\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0}$ *; car $\overrightarrow{e_r}$ est un vecteur lié à $\mathcal{R}'$.*
- $\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

Or :$\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r}$ *d'où :*$\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r}$.

Ainsi

- $\left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0}$ *; car $\overrightarrow{e_\theta}$ est un vecteur lié à $\mathcal{R}'$.*
- $\left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$

Or :$\overrightarrow{e_r} = -\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$ *d'où :*$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$.

On pose :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \Omega\overrightarrow{e_z}}$$

$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ *est appelé le* ***vecteur instantannée de rotation*** *du repère relatif $\mathcal{R}$' par rapport au repère absolu $\mathcal{R}$; il caractérise la rotation du repère relatif $\mathcal{R}$' par rapport au repère absolu $\mathcal{R}$*
Par conséquent

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{e_r} \qquad \left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{e_\theta}$$

Conclusion :

: Si $\overrightarrow{A}$ un ***vecteur lié*** *au repère relatif $\mathcal{R}$' alors*

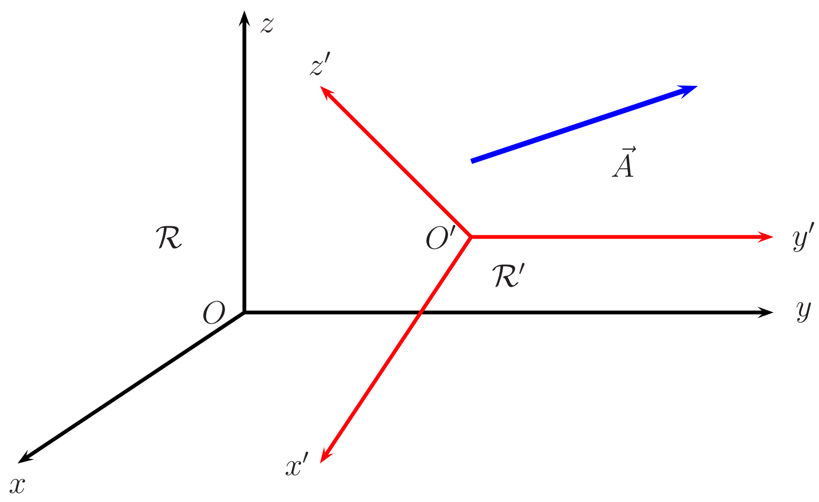
$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{A}}$$

Remarque- 20 :

- $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}') = -\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$
- $\overrightarrow{\Omega}$ *est porté par l'axe de rotation.*
- $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3) = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3)$ *: relation de* ***châles****.*

7.2.1.2 Relation fondamentale de la dérivation vectorielle

Soit $\vec{A}$ un vecteur libre non lié à $\mathcal{R}$' qu'on connaît ses composantes dans $\mathcal{R}$' et on désire le dériver par rapport à $\mathcal{R}$.



on admet le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{A}}$$

Remarque- 21 :

1. *Si $\vec{A}$ est lié à $\mathcal{R}$' alors on retrouve le résultat précédent.*
2. *Pour un mouvement de translation :$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0}$ d'où :*

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'}}$$

C'et à dire dériver par rapport à $\mathcal{R}$ou $\mathcal{R}$' c'et la même chose : autrement dit la dérivation ne dépend pas du repère.

7.2.2 Composition des vitesses

Soit un point M mobile dans un référentiel relatif $\mathcal{R}$' en mouvement par rapport à un référentiel absolu $\mathcal{R}$galiléen .
On appelle :
• ***La vitesse relative*** $\overrightarrow{V}_r(M) = \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}')$ *la vitesse du point M dans le référentiel*

relatif $\mathcal{R}$'

• ***La vitesse absolue*** $\overrightarrow{V}_a(M) = \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ *la vitesse du point* M *dans le référentiel absolu* $\mathcal{R}$

Quelle relation entre $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ *et* $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}')$ *?*

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Longrightarrow \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}_{/\mathcal{R}} + \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}}$

d'où : $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R}) + \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}') + \overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

• *On pose :*

$$\boxed{\overrightarrow{V}_e(M) = \overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

vitesse d'entrainement de M *.*

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V_e}(M/\mathcal{R}) + \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}')}$$

Si $M \equiv A$ *lié à* $\mathcal{R}'$ *alors* $\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}') = \vec{0}$ *donc :*

$$\boxed{\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{V_e}(M/\mathcal{R})}$$

`La vitesse d'entrainement c'est la vitesse d'un point lié à` $\mathcal{R}'$ `et qui coincide à l'instant` t `avec le point` M `.`

Le point A *est dit point coïncidant.*

Remarque- 22 *:*

• *Dans le cas de la translation* $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$ *donc :*

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}') + \overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R})}$$

• *si* $O \equiv O'$ *alors* $\overrightarrow{V_e}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}$ *:*

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}') + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}}$$

• *si* $O \equiv O'$ *et* M *lié à* $\mathcal{R}$ *alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}}$$

C'est une rotation pure autour de l'axe $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$

7.2.3 Composition des accélérations

On a :

- $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R}) + \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}$
- $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}}$
- $\dfrac{d\overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{a}(O'/\mathcal{R})$
- $\dfrac{d}{dt}_{/\mathcal{R}}(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}'}) = \dfrac{d}{dt}_{/\mathcal{R}'}(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}'}) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge (\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}'}) = \overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}') + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge$ $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}')$
- $\dfrac{d}{dt}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}) = (\dfrac{d\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}}) \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}}$

$= \dot{\overrightarrow{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge [\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}]$

$= \dot{\overrightarrow{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}') + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge (\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M})$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}') + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}') + \dot{\overrightarrow{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})}$$

On pose :

$$\boxed{\overrightarrow{a_e}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}(O'/\mathcal{R}) + \dot{\overrightarrow{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge (\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M})}$$

accélération d'entrainement.

$$\boxed{\overrightarrow{a_c}(M/\mathcal{R}) = 2\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}')}$$

accélération de Coriolis.

CAS PARTICULIERS :

1. $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0}$ mouvement de translation alors :$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$
   $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}')$
   $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$.
2. $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{cte}$
   $\overrightarrow{a_e}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge (\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M})$.
3. M lié à $\mathcal{R}' \Longrightarrow$
   $$\boxed{\overrightarrow{a_c}(M/\mathcal{R}') = \overrightarrow{0}}$$
4. $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{cte}$ et $O \equiv O'$ le point M décrit un cercle
   $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{HM}$.
   H étant la projection de M sur l'axe $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$.
   Or :$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{0}$; et $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{HM} = -\Omega\, HM \overrightarrow{e_\theta}$.
   donc :
   $$\boxed{\overrightarrow{a}_e(M) = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge [\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}] = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}}$$

accélération centripète

5.

$$\boxed{\overrightarrow{a}_e(M) \neq \frac{d\overrightarrow{V}_e(M)}{dt}}$$

7.3 Dynamique dans un référentiel non galiléen

7.3.1 RFD dans un référentiel non galiléen : forces d'inertie

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}'$ un référentiel non galiléen en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$; en général $\mathcal{R}'$ non galiléen.
La relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}$ donne :
$\Sigma\overrightarrow{F}_e = m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$
Or : $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}') + \overrightarrow{a}_e(M) + \overrightarrow{a}_c(M)$
donc : $\Sigma\overrightarrow{F}_e - m\overrightarrow{a}_e(M) - m\overrightarrow{a}_c(M) = m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}')$
On pose :

$$\boxed{\overrightarrow{f_ie} = -m\overrightarrow{a}_e(M)}$$

force d'inertie d'entrainement

$$\boxed{\overrightarrow{f_ic} = -m\overrightarrow{a}_c(M)}$$

force d'inertie de Corriollis

D'où dans un référentiel non galiléen la R.F.D s'écrit :

$$\boxed{\Sigma\overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{f_ie} + \overrightarrow{f_ic} = m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}')}$$

***Remarque-* 23** *:*

1. *Si le corps est en équilibre dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ alors* $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}') = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{f_ic} = -2m\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}') = \overrightarrow{0}$ *donc*

$$\boxed{\Sigma\overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{f_ie} = \overrightarrow{0}}$$

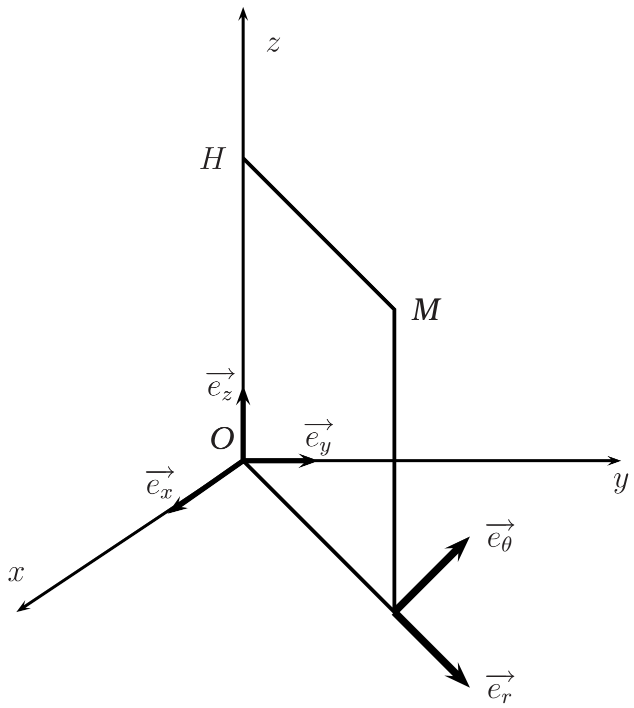
2. *Si $O \equiv O'$ et $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{cte}$ alors*

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{ie} = m\Omega^2\overrightarrow{HM}}$$

3. *Les forces d'inertie $\overrightarrow{F}_{ie}$ et $\overrightarrow{F}_{ic}$ n'apparaissent que si le référentiel est non galiléen : Ce sont des pseudo-forces*

7.3.2 L'énergie potentielle d'entrainemment

On rappelle que si $O \equiv O'$ *et* $\Omega = cte$ *alors la force* $\overrightarrow{f_ie}$ *s'écrit :*$\overrightarrow{f_ie} = m\Omega^2\overrightarrow{HM}$*.*



Donc : $\overrightarrow{f_ie}.d\overrightarrow{OM} = m\Omega^2\overrightarrow{HM}.d\overrightarrow{OM}$ *et comme*
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} \Longrightarrow d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OH} + d\overrightarrow{HM}$
Or :$\overrightarrow{HM}.d\overrightarrow{OH} = 0$
D'où :$\overrightarrow{f_ie}.d\overrightarrow{OM} = m\Omega^2 d(\frac{\overrightarrow{HM}^2}{2} + cte)$

$$\boxed{\mathbf{E}p_e = -\frac{1}{2}m\Omega^2\overrightarrow{HM}^2 + cte}$$

On conclut que dans les conditions précédentes la force d'entrainement est conservative.

Remarque- 24 *:*

1. *Le travail élémentaire de la force de Coriolis :*
   $\delta\mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{ic}) = \overrightarrow{F}_{ic}.d\overrightarrow{OM} \Longrightarrow \delta\mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{ic}) = -2m(\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{V}_r).\overrightarrow{V}_r dt = 0$
   Donc la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas et par conséquent elle dérive d'une énergie potentielle constante.
2. *Dans* $\mathcal{R}'$ *non galiléen :*
   (a) *Le T.E.C s'écrit :*

   $$\boxed{\Delta\mathbf{E}c = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{ext}) + \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{ie})}$$

   (b) *Le T.M.C s'écrit : avec*

   $$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{O'}(M/\mathcal{R}')} = \overrightarrow{O'M} \wedge m\overrightarrow{V}_r(M)}$$

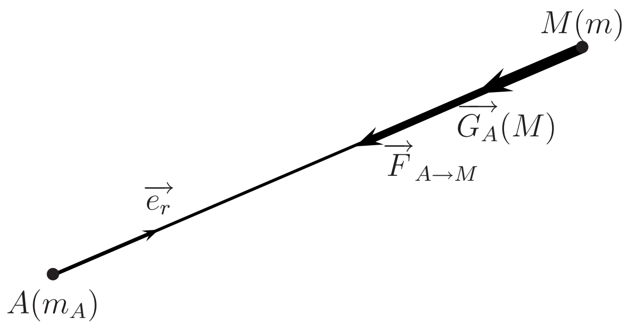
$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O'}(M/\mathcal{R}')}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{o'}}(\overrightarrow{F}_{ext}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{o'}}(\overrightarrow{F}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{o'}}(\overrightarrow{F}_{ic})}$$

7.3.3 Applications

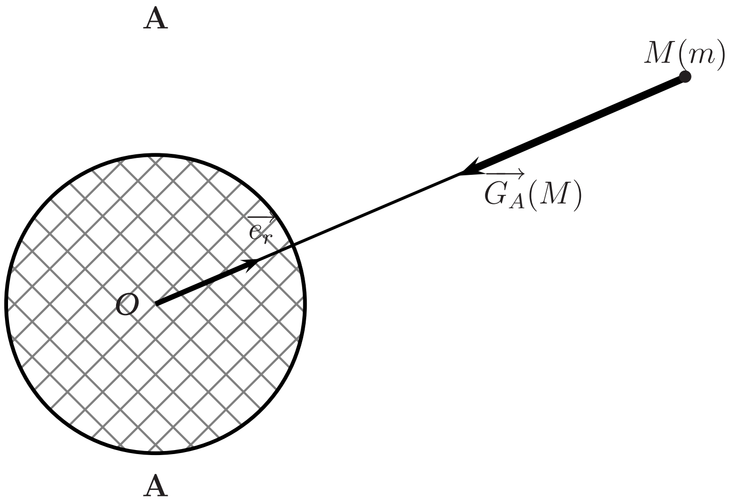
7.3.3.1 Préliminaire

▶ *Tout corps A de masse m_A crée en tout point M de l'espace un champ gravitationnel centripète $\overrightarrow{G_A}(M)$.*

▶ *La force exercée par A sur un point M de masse m est :* $\overrightarrow{F}_{A\to M} = m\overrightarrow{G_A}(M)$



▶ *Si le corps A est de forme sphérique alors :*$\overrightarrow{G_A}(M) = -G\dfrac{m_A}{r^2}\overrightarrow{e_r}$



Remarque- 25 :

Dans l'expression de la force :

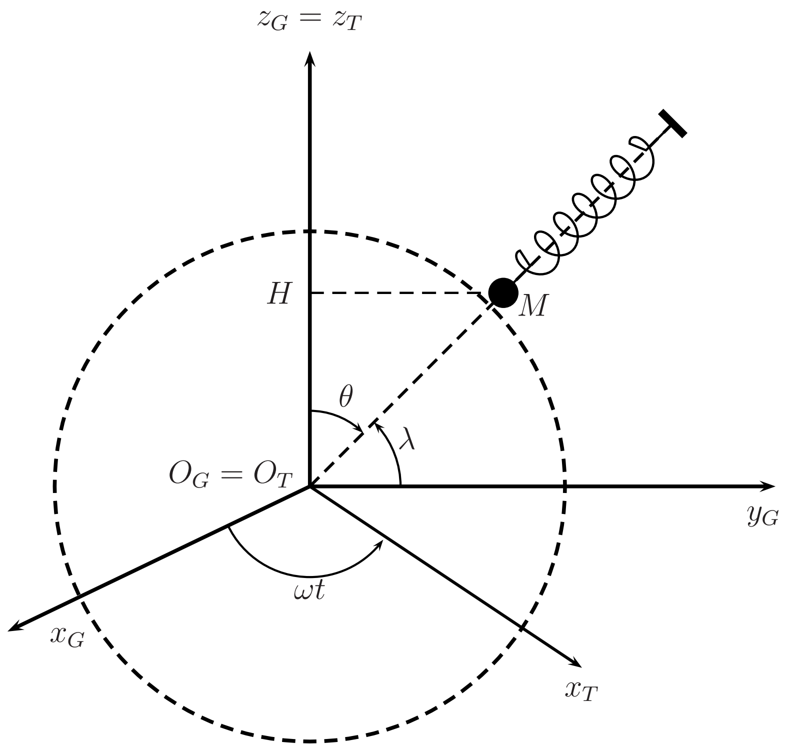
▶ *Gravitationnelle* $\overrightarrow{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ *: la masse est dite masse gravitationnelle.*

▶ *RFD* $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ *: la masse est dite inertielle.*

On admet que les deux masses sont identiques

7.3.3.2 Définition du poids

Soit un corps accroché à un ressort en équilibre dans le référentiel terrestre non galiléen en rotation uniforme autour de $O_G z$.



On a Dans $\mathcal{R}_T$: $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{T} = -\overrightarrow{P}$. avec

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}(M)}$$

$\overrightarrow{g}(M)$: Champ de pesanteur.
La relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ non galiléen donne :

$$m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}_{/\mathcal{R}_T} = \Sigma\overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{f_i e} + \overrightarrow{f_i c}$$

Or $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}_T) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{f_i c} = \overrightarrow{0}$ (équilibre relatif)
De même : $\Sigma\overrightarrow{F}_e = m\overrightarrow{G}_T(M) + \overrightarrow{T}$ (On néglige l'effet des autres astres autre que la terre)
Et $\overrightarrow{f_i e} = -m\overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = m\Omega^2\overrightarrow{HM}$
avec Ω la pulsation propre du référentiel terrestre dans le référentiel Géocentrique.
on conclut que : $\overrightarrow{T} + m\Omega^2\overrightarrow{HM} + m\overrightarrow{G}_T(M) = \overrightarrow{0}$.
L'équilibre donne : $\overrightarrow{T} = -\overrightarrow{P} = -m(\overrightarrow{G}_T(M) + \Omega^2\overrightarrow{HM})$.
On tire que :

$$\boxed{\overrightarrow{g}(M) = \overrightarrow{G}_T(M) + \Omega^2\overrightarrow{HM}}$$

Remarque- 26 *:*
$\overrightarrow{g}(M)$ n'est pas centripète que si on néglige la rotation propre de la terre dans le référentiel Géocentrique ou aux pôles $HM = 0$.

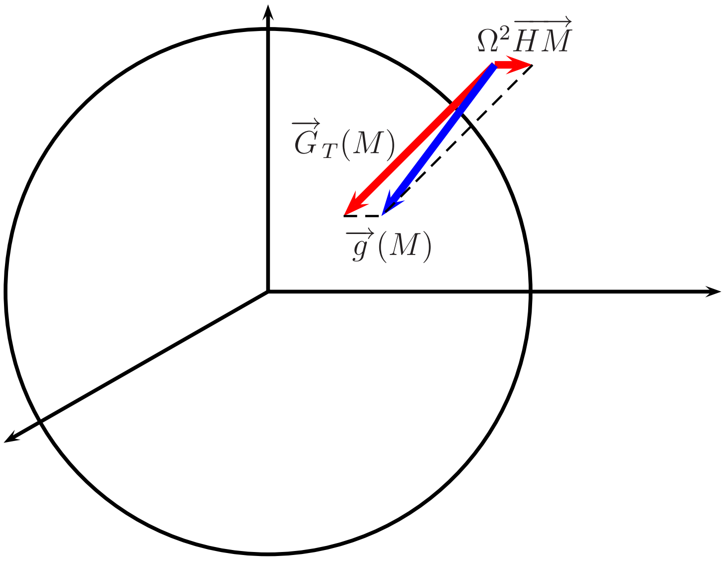
***Quelques ordre de grandeur à Béni Mellal** :*
- *Le rayon terrestre : $R_T = 6380\ km$*
- *La latitude $\lambda = 34^o30'$*
- *La masse de la terre $m_T = 5,97.10^{24}\ kg$*

• *La constante d'attraction universelle* $G = 6,67.10^{-11}\ N.kg^{-2}.m^2$
Tout calcul donne :

$$\boxed{G_T = 9,72\ m.s^{-2}}$$

$$\boxed{\Omega^2 HM = \frac{4\pi^2}{T^2} R_T \cos\lambda \Longrightarrow \Omega^2 HM = 0,0279\ m.s^{-2}}$$

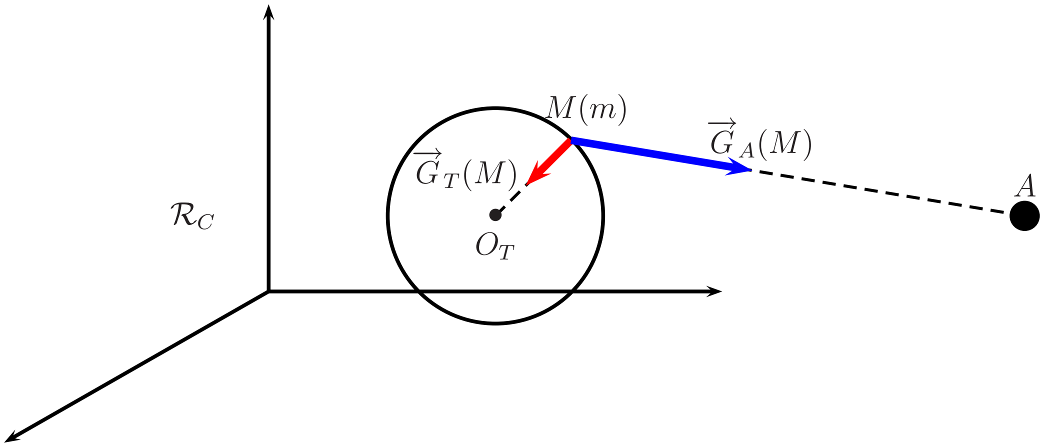
On conclut que le terme $\Omega^2\overrightarrow{HM}$ *est un terme correctif*



7.3.3.3 Effet de marée statique

7.3.3.3.1 Expression analytique .

Dans le référentiel de Copernic supposé galiléen ; soit un point $M(m)$ *lié au repère terrestre :*$\overrightarrow{V}(M/T) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{f_i c} = \overrightarrow{0}$.
$\overrightarrow{G}_T$ *:le champ gravitationnel terrestre .*
$\overrightarrow{G}_A$ *:le champ gravitationnel de tous les astres sauf la terre (soleil, lune,...).*
$\mathcal{R}_T$ *: référentiel terrestre non galiléen en rotation par rapport à* $\mathcal{R}_G$ *:*$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G)$.
$\mathcal{R}_G$ *: référentiel géocentrique en translation circulaire (l'excentricité de l'ellipse terrestre est* $e = 0,01671022$*)par rapport référentiel de Copérnic* $\mathcal{R}_C$ *,supposé galiléen.*
R.F.D dans $\mathcal{R}_T$ *donne :*
$m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}_T) = m\overrightarrow{\mathbf{G}}_T(M) + m\overrightarrow{\mathbf{G}}_a(M) - m\overrightarrow{a}_e(M)$
Or :$\overrightarrow{a}_e(M) = \overrightarrow{a}(O/\mathcal{R}_C) + \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + \dot{\overrightarrow{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OM}$
On néglige le terme (on suppose que la rotation est uniforme) :$\dot{\overrightarrow{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OM}$
On tire que :$\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}_T) = \overrightarrow{\mathbf{G}}_T(M) + \overrightarrow{\mathbf{G}}_a(M) - \overrightarrow{a}(O/\mathcal{R}_C) - \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$
Appliquons la RFD à la terre dans le référentiel de Copérnic :



$$m_T\overrightarrow{a}(O/\mathcal{R}_C) = m_T\overrightarrow{\mathbf{G}}_a(O) \Longrightarrow \overrightarrow{a}(O/\mathcal{R}_C) = \overrightarrow{\mathbf{G}}_a(O)$$

donc : $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}_T) = \overrightarrow{\mathbf{G}}_T(M) + \overrightarrow{\mathbf{G}}_a(M) - \overrightarrow{\mathbf{G}}_a(O) - \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}_T) = \overrightarrow{\mathbf{G}}_T(M) - \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{\mathbf{G}}_a(M) - \overrightarrow{\mathbf{G}}_a(O)}$$

On pose :

$$\boxed{\overrightarrow{g}(M) = \overrightarrow{\mathbf{G}}_T(M) - \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})}$$

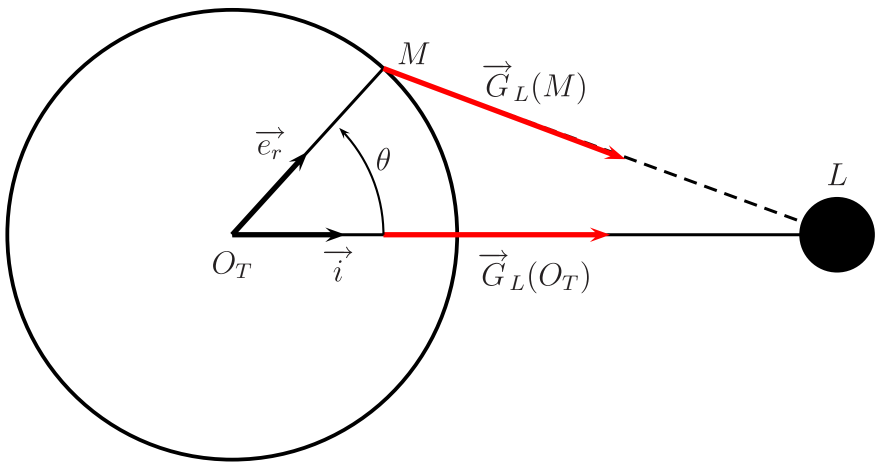
le champ de pesanteur :terme statique

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbb{C}}(M) = \overrightarrow{\mathbf{G}}_a(M) - \overrightarrow{\mathbf{G}}_a(O)}$$

terme de marée : terme dépendant du temps

7.3.3.3.2 La marée océanique .

En supposant que la terre et la lune sont de formes sphériques et on donne :
$R_T = 6400km$ **et** $d = OL = 4.10^5\ km$
On néglige l'effet de tous les astres sauf l'effet de la lune.
On a : $\overrightarrow{\mathbb{C}}(M) = \overrightarrow{G}_L(M) - \overrightarrow{G}_L(O)$



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbb{C}}(M) = \overrightarrow{G}_L(M) - \overrightarrow{G}_L(O) \Longrightarrow\ \overrightarrow{\mathbb{C}}(M) &= Gm_L\frac{\overrightarrow{LO}}{LO^3} - Gm_L\frac{\overrightarrow{LM}}{LM^3} \\
\Longrightarrow\ \overrightarrow{\mathbb{C}}(M) &= Gm_L[\frac{-d\,\overrightarrow{i}}{d^3} + \frac{\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OM}}{LM^3}] \\
\Longrightarrow\ \overrightarrow{\mathbb{C}}(M) &= Gm_L[\frac{-d\,\overrightarrow{i}}{d^3} + \frac{d\,\overrightarrow{i} - R\overrightarrow{e_r}}{LM^3}] \\
\Longrightarrow\ \overrightarrow{\mathbb{C}}(M) &= Gm_L[\frac{-d\,\overrightarrow{i}}{d^3} + \frac{d\,\overrightarrow{i} - R\overrightarrow{e_r}}{(R^2 + d^2 - 2dR\cos\theta)^{3/2}}] \\
\Longrightarrow\ \overrightarrow{\mathbb{C}}(M) &= \frac{Gm_L}{d^3}[-d\,\overrightarrow{i} + \frac{d\,\overrightarrow{i} - R\overrightarrow{e_r}}{(1 - 2\frac{R}{d}\cos\theta)^{3/2}}] \\
\Longrightarrow\ \overrightarrow{\mathbb{C}}(M) &\simeq \frac{Gm_L}{d^3}[-d\,\overrightarrow{i} + (d\,\overrightarrow{i} - R\overrightarrow{e_r})(1 + 3\frac{R}{d}\cos\theta)] \\
\Longrightarrow\ \overrightarrow{\mathbb{C}}(M) &\simeq \frac{Gm_L}{d^3}[3R\cos\theta\,\overrightarrow{i} - R\overrightarrow{e_r} + 3\frac{R^2}{d}\cos\theta\overrightarrow{e_r}]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbb{C}}(M) \simeq \frac{GRm_L}{d^3}(3\cos\theta\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{e_r})}$$

force par unité de mase

- *en A :* $\theta = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{i}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbb{C}}(\theta = 0) = \frac{2RGm_L}{d^3}\overrightarrow{i}}$$

- *en B :* $\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{j}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbb{C}}(\theta = \frac{\pi}{2}) = -\frac{RGm_L}{d^3}\overrightarrow{j}}$$

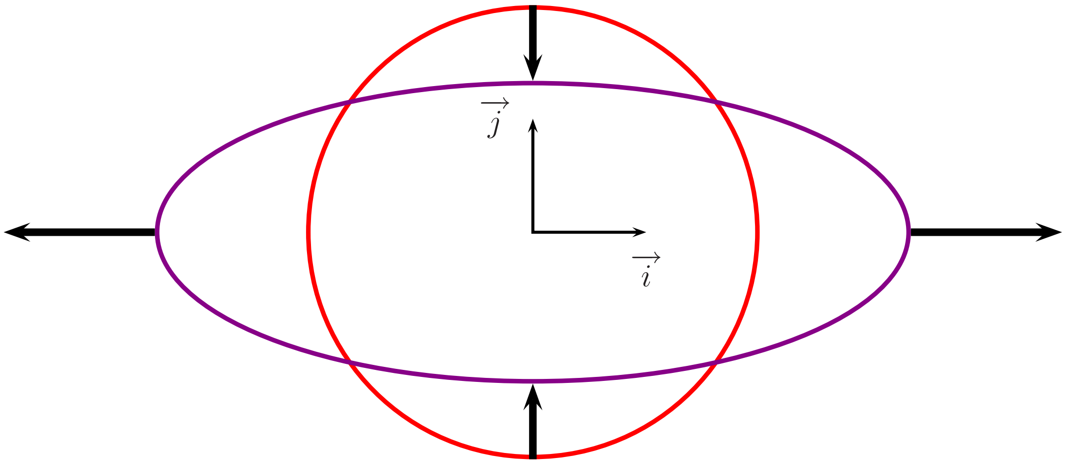
- *en C :* $\theta = \pi \Longrightarrow \overrightarrow{e_r} = -\overrightarrow{i}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbb{C}}(\theta = \pi) = -\frac{2RGm_L}{d^3}\overrightarrow{i}}$$

- *en D :* $\theta = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{e_r} = -\overrightarrow{j}$

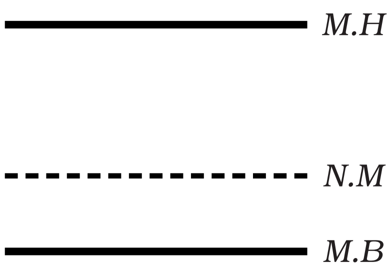
$$\boxed{\overrightarrow{\mathbb{C}}(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{RGm_L}{d^3}\overrightarrow{j}}$$

Donc les marées hautes en A et C et les marées basses en B et D.



D'où deux marées hautes et deux marées basses par jour décalé de 6H.

Remarque- 27 :
Le cœfficient de la marée haute est le double du cœfficient de la marée basse.



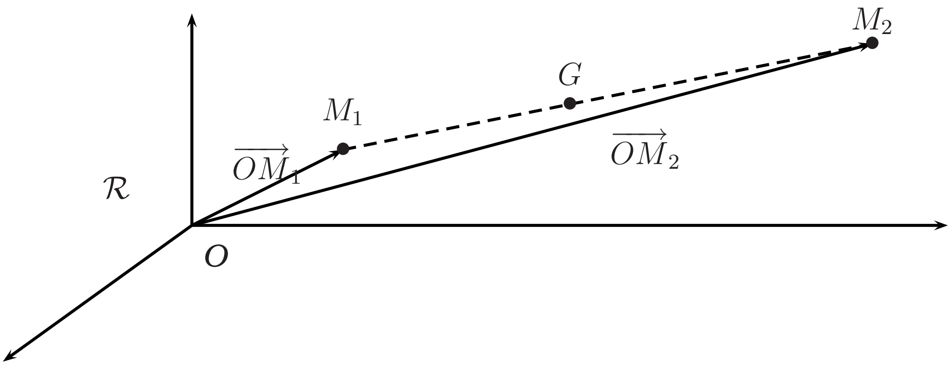
7.3.3.4 Déviation vers l'est

Voir TD

Chapitre 8

Système de deux points matériels

*Dans un **repère galiléen** $\mathcal{R}$,considérons un système de deux points matériels $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$*



8.1 Grandeurs cinématiques

8.1.1 Barycentre du système

Le barycentre G du système $\{M_1, M_2\}$ est donné par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2}{m_1 + m_2} \Longrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} \qquad (1)}$$

Si $O \equiv G$ *alors :*

$$\boxed{m_1\overrightarrow{GM}_1 + m_2\overrightarrow{GM}_2 = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{0}}$$

Dérivons (1) par rapport au temps on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}) = \frac{m_1\overrightarrow{V}(M_1/\mathcal{R}) + m_2\overrightarrow{V}(M_2/\mathcal{R})}{m_1 + m_2}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) = \frac{m_1\overrightarrow{a}(M_1/\mathcal{R}) + m_2\overrightarrow{a}(M_2/\mathcal{R})}{m_1 + m_2}}$$

Remarque- 28 :
Puisque $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0}$ *alors les points* M_1, G *et* M_2 *sont alignés.*

8.1.2 Repère Barycentrique

C'est le repère centré en G *et dont les axes restent constamment parallèles à ceux de* $\mathcal{R}$,*on le note* $\mathcal{R}_G, \mathcal{R}_B$ *ou* $\mathcal{R}^\star$
Conséquence :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}^\star/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \forall \overrightarrow{A} : \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}^\star}}$$

NOTATION
- $\overrightarrow{V}(M_1/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}_1$ • $\overrightarrow{V}(M_2/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}_2$
- $\overrightarrow{a}(M_1/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}_1$ • $\overrightarrow{a}(M_2/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}_2$
- $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_2 - \overrightarrow{V}_1$:*vitesse relative de* M_2 *par rapport à* M_1 *dans le repère* $\mathcal{R}$.
- $\overrightarrow{V}_{1B} = \overrightarrow{V}(M_1/\mathcal{R}_B) = \left.\frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}_B}$:*vitesse de* M_1 *dans* $\mathcal{R}_B$
- $\overrightarrow{V}_{2B} = \overrightarrow{V}(M_2/\mathcal{R}_B) = \left.\frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}_B}$:*vitesse de* M_2 *dans* $\mathcal{R}_B$
- $\overrightarrow{V}_B = \overrightarrow{V}_{2B} - \overrightarrow{V}_{1B}$:*vitesse relative de* M_2 *par rapport à* M_1 *dans le repère barycentrique* $\mathcal{R}^\star$.

On conclut que :

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{1B} = \overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_G \quad ; \quad \overrightarrow{V}_{2B} = \overrightarrow{V}_2 - \overrightarrow{V}_G}$$

Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_B}$$

c'est à dire la vitesse relative à la même valeur dans $\mathcal{R}$ *et dans* $\mathcal{R}^*$.
- *On a :*
- $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{r}_{2B} - \overrightarrow{r}_{1B}$
- $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow m_1\overrightarrow{r}_{1B} + m_2\overrightarrow{r}_{2B} = \overrightarrow{0}$

On conclut que :

$$\boxed{\overrightarrow{r_{1B}} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r} \quad \| \quad \overrightarrow{r_{2B}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{1B} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{V} \quad \| \quad \overrightarrow{V}_{2B} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{V}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{1B} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{a} \quad \| \quad \overrightarrow{a}_{2B} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{a}}$$

8.1.3 Quantité de mouvement

8.1.3.1 Dans le repère $\mathcal{R}$

Dans le repère $\mathcal{R}$ *on a :*
$\overrightarrow{P}_1 = m_1\overrightarrow{V}_1$ *et* $\overrightarrow{P}_2 = m_2\overrightarrow{V}_2$

La quantité de mouvement totale du système est :
$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P}_1 + \overrightarrow{P}_2 \Longrightarrow \overrightarrow{P} = m_1\overrightarrow{V}_1 + m_2\overrightarrow{V}_2 = (m_1+m_2)\overrightarrow{V}_G$ *donc*

$$\boxed{\mathcal{P} = (m_1+m_2)\overrightarrow{V}_G = m_T\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R})}$$

8.1.3.2 Dans le repère $\mathcal{R}^\star$;,masse réduite

On a :
$\overrightarrow{P}_{1B} = m_1\overrightarrow{V}_{1B} = m_1(\overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_G) = m_1(\overrightarrow{V}_1 - \dfrac{m_1\overrightarrow{V}_1 + m_2\overrightarrow{V}_2}{(m_1+m_2)}) = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_2)$
On pose :

$$\boxed{\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \Longrightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

masse réduite du système

On déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{P}_{1B} = -\mu\overrightarrow{V} \quad \| \quad \overrightarrow{P}_{2B} = \mu\overrightarrow{V}}$$

On tire que :

$$\boxed{\overrightarrow{P}_B = \overrightarrow{P}_{1B} + \overrightarrow{P}_{2B} = \overrightarrow{0}}$$

Conclusion :
La quantité de mouvement totale du système est nulle dans le repère barycentrique.

8.2 Grandeurs cinétiques

8.2.1 Le moment cinétique du système

8.2.1.1 Dans le repère $\mathcal{R}^\star$

$\overrightarrow{\sigma}^\star(M_1/G) = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\overrightarrow{V}_1 = \overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{P}_{1B}$
$\overrightarrow{\sigma}^\star(M_2/G) = \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{P}_{2B}$
Le moment cinétique total du système est donné par :
$\overrightarrow{\sigma}^\star(S) = \overrightarrow{\sigma}^\star(M_1/G) + \overrightarrow{\sigma}^\star(M_2/G)$
$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}^\star = \overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{P}_{1B} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{P}_{2B} = (\overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1}) \wedge \overrightarrow{P}_{2B}$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}^\star(S) = \overrightarrow{r} \wedge \mu\overrightarrow{V}}$$

8.2.1.2 Dans le repère $\mathcal{R}$

On a : $\overrightarrow{\sigma}_{\mathcal{R}}(M_1/O) = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1\overrightarrow{V}_1$ *ainsi* $\overrightarrow{\sigma}_{\mathcal{R}}(M_2/O) = \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2\overrightarrow{V}_2$
$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}_{\mathcal{R}}(S/O) = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2\overrightarrow{V}_2$
$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}_{\mathcal{R}}(S/O) = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_1}) \wedge m_1(\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{V}_{1B}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_2}) \wedge m_2(\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{V}_{2B})$
$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}_{\mathcal{R}}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge m_1\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{OG} \wedge m_1\overrightarrow{V}_{1B} + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\overrightarrow{V}_{1B} + \overrightarrow{OG} \wedge m_2\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{OG} \wedge m_2\overrightarrow{V}_{2B} + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\overrightarrow{V}_{2B}$

$\Longrightarrow \vec{\sigma}_{\mathcal{R}}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge (m_1 + m_2)\vec{V}_G + \overrightarrow{OG} \wedge (m_1\vec{V}_{1B} + m_2\vec{V}_{2B}) + (m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2}) \wedge \vec{V}_G + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\vec{V}_{1B} + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\vec{V}_{2B}$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{\mathcal{R}}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge M_T\vec{V}_G + \vec{\sigma}^{\star}(S)}$$

c'est le premier théorème de Kœnig

8.2.2 L'énergie cinétique du système

8.2.2.1 Dans le repère $\mathcal{R}^{\star}$

On a : $E_{CB_1} = \frac{1}{2}m_1\vec{V}_{1B}^2 = \frac{P_{1B}^2}{2m_1}, \quad E_{CB_2} = \frac{1}{2}m_2\vec{V}_{2B}^2 = \frac{P_{2B}^2}{2m_2}$

L'énergie totale du système est donnée par :

$E_{CB} = \frac{P_{1B}^2}{2m_1} + \frac{P_{2B}^2}{2m_2} = \frac{P_{2B}^2}{2}(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) = \frac{P_{2B}^2}{2\mu}$

$$\boxed{E_{CB} = \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2}$$

μ : masse réduite du système.
V : vitesse relative de M_2 par rapport à M_1

8.2.2.2 Dans le repère $\mathcal{R}$

On a :

$E_{C_1} = \frac{1}{2}m_1\vec{V}_1^2 = \frac{1}{2}m_1(\vec{V}_G + \vec{V}_{1B})^2 = \frac{1}{2}m_1(\vec{V}_G^2 + \vec{V}_{1B}^2 + 2\vec{V}_G.\vec{V}_{1B})$

De même :

$E_{C_2} = \frac{1}{2}m_2\vec{V}_2^2 = \frac{1}{2}m_2(\vec{V}_G + \vec{V}_{2B})^2 = \frac{1}{2}m_2(\vec{V}_G^2 + \vec{V}_{2B}^2 + 2\vec{V}_G.\vec{V}_{2B})$

l'énergie cinétique totale du système s'écrit :

$E_C(S) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{V}_G^2 + \frac{1}{2}(m_1\vec{V}_{1B}^2 + m_2\vec{V}_{2B}^2) + \vec{V}_G.(m_1\vec{V}_{1B} + m_2\vec{V}_{2B})$

D'où :

$$\boxed{E_C(S) = E_{CB} + \frac{1}{2}M_T\vec{V}_G^2}$$

le deuxième théorème de Kœning

Remarque- 29 :

1. *Dans $\mathcal{R}^{\star}$ toutes les quantités s'expriment en fonction de :*
   - *la masse réduite* $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
   - *la vitesse relative* $\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}^{\star}$ *de* M_2 *par rapport à* M_1.

8.3 Dynamique du système

Supposons que les deux points sont soumis à :

- M_1 :

- $\overrightarrow{F}_{i1}$: *force exercée par* M_2
- $\overrightarrow{F}_{e1}$: *force exercée par le milieu extérieur du système sur* M_1

▶ M_2 :

- $\overrightarrow{F}_{i2}$: *force exercée par* M_1
- $\overrightarrow{F}_{e2}$: *force exercée par le milieu extérieur du système sur* M_2

Les forces $\overrightarrow{F}_{e1}$ *et* $\overrightarrow{F}_{e2}$ *sont des forces extérieures et les deux forces* $\overrightarrow{F}_{i1}$ *et* $\overrightarrow{F}_{i2}$ *sont des forces intérieures qui obéissent au principe de l'action et la réaction (troisième loi de Newton) c'est à dire*

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{i1} = -\overrightarrow{F}_{i2}}$$

8.3.1 Relation fondamentale de la dynamique

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$*pour chaque point du système :*

▶ *Pour* M_1 : $m_1\overrightarrow{a}_1 = \overrightarrow{F}_{i1} + \overrightarrow{F}_{e1}$ *(E1)*

▶ *Pour* M_2 : $m_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{F}_{i2} + \overrightarrow{F}_{e2}$ *(E2)*

$(E1) + (E2)$ *donne* $m_1\overrightarrow{a}_1 + m_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{F}_{e1} + \overrightarrow{F}_{e2}$ *donc la RFD pour le système s'écrit*

$$\boxed{m_T\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) = \overrightarrow{F}_{e1} + \overrightarrow{F}_{e2}}$$

Théorème de la résultante cinétique

Conclusion :

Le mouvement du barycentre est identique à celui d'un point matériel de masse m_T ***soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures***

$$m_T\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) = \overrightarrow{F}_{ext}$$

Remarque- 30 :

1. *Le Théorème de la résultante cinétique ne fait apparaître que les forces extérieures.*
2. *(E2)-(E1) donne :*

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{V}^*}{dt} = \frac{\overrightarrow{F}_{i2}}{\mu} + \frac{\overrightarrow{F}_{e2}}{m_2} - \frac{\overrightarrow{F}_{e1}}{m_1}}$$

8.3.2 Théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen

8.3.2.1 Moment des forces en un point O fixe dans $\mathcal{R}$.

Calculons les moments de tous les forces appliquées en un point O fixe dans $\mathcal{R}$.

• $\overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\overrightarrow{F}_{i1}) = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \overrightarrow{F}_{i1}$; • $\overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\overrightarrow{F}_{i2}) = \overrightarrow{OM}_2 \wedge \overrightarrow{F}_{i2}$ *donc :*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\overrightarrow{F}_i) = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{F}_{i2} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_o(int) = \overrightarrow{0}}$$

puisque $\overrightarrow{F}_{i2}$ *est colinéaire avec* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *.*
On retient que pour un système de deux points

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_o} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}_{ext}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(ext)}$$

8.3.2.2 Moment des forces en G barycentre

Calculons les moments de tous les forces appliquées en G barycentre du système :
• $\overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\overrightarrow{F}_{i1}) = \overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{F}_{i1}$; • $\overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\overrightarrow{F}_{i2}) = \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{F}_{i2}$ *donc :*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\overrightarrow{F}_i) = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{F}_{i2} = \overrightarrow{0}}$$

puisque $\overrightarrow{F}_{i2}$ *est colinéaire avec* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *.*
On retient que pour un système de deux points

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G} = \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\overrightarrow{F}_{ext})}$$

8.3.2.3 Théorème du moment cinétique barycentrique

On a d'après le théorème de Kœnig $\overrightarrow{\sigma}_{\mathcal{R}}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge M_T\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{\sigma}^{\star}(S)$ *donc :*
$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(ext) = \dfrac{d\overrightarrow{\sigma}_{\mathcal{R}}(S/O)}{dt}/\mathcal{R} = \dfrac{d\overrightarrow{\sigma}^{\star}(S)}{dt}/\mathcal{R} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F}_e$
Sachant que :
$\overrightarrow{\mathcal{M}_o} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}_o} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F} + \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{F}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_o} = \overrightarrow{\mathcal{M}_G} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F}}$$

On en déduit le théorème du moment cinétique barycentrique

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}^{\star}(S)}{dt}\right|_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(ext)}$$

8.3.3 Puissance des forces intérieures

▸ ***Puissance des forces extérieures** :*

$$\boxed{\mathcal{P}(ext) = \overrightarrow{F}_{e1}.\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{F}_{e2}.\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{F}_{ext}.\overrightarrow{V}_G}$$

▸ ***Puissance des forces intérieures** :*

$$\boxed{\mathcal{P}(int) = \overrightarrow{F}_{i1}.\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{F}_{i2}.\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{F}_{i2}.\overrightarrow{V} = \overrightarrow{F}_{i2}.\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{F}_{i2}.\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}}$$

La puissance des forces intérieures est en générale non nulle pour un système déformable , par contre nulle pour un système indéformable $M_1M_2 = cte$

8.3.4 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen

D'après ce qui précède on tire que :

$$\boxed{\Delta \mathbf{E}c = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}(ext)) + \mathbf{W}(\overrightarrow{F}(int))}$$

8.3.5 L'énergie potentielle d'interaction

• *Dans le repère* $\mathcal{R}$

$\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F}_{i1}.d\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{F}_{i2}.d\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{F}_{i2}.(d\overrightarrow{OM}_2 - d\overrightarrow{OM}_1)$

$$\boxed{\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F}_{i2}.d\overrightarrow{M_1M_2}}$$

• *Dans* $\mathcal{R}_B$

$\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{F}_{i1}.d\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{F}_{i2}.d\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{F}_{i2}.(d\overrightarrow{GM_2} - d\overrightarrow{GM_1})$

$$\boxed{\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{F}_{i2}.d\overrightarrow{M_1M_2}}$$

<u>Conclusion :</u> *Pour un système de deux points matériels le travail des forces intérieures ne dépend pas du référentiel et non nul pour un système déformable*

Si on pose : $\overrightarrow{F}_{i1} = -f(r)\overrightarrow{e_r}$ *et* $\overrightarrow{F}_{i2} = f(r)\overrightarrow{e_r}$*, ainsi* $\overrightarrow{M_1M_2} = r\overrightarrow{e_r}$

Donc : $\delta \mathbf{W} = f(r)\overrightarrow{e_r}.d(r\overrightarrow{e_r}) = f(r)\overrightarrow{e_r}.(dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta})$

$\Longrightarrow \delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}_B} = f(r)dr(= -d\mathbf{E}p)$ *si* $\overrightarrow{F}_{i2}$ *est conservative.*

$$\boxed{\mathbf{E}p_{int} = -\int f(r)dr}$$

l'énergie potentielle d'interaction

8.3.6 Énergie mécanique

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ *on a :*

$$\boxed{E_m = E_c + \mathbf{E}p(ext) + \mathbf{E}p(int)}$$

et par conséquent :

$$\boxed{\Delta E_m = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{NC})}$$

Pour un système conservative l'énergie mécanique est constante (l'intégrale première de l'énergie)

8.4 Cas d'un système isolé de deux points matériels

Le système est isolé si

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{i1} = \overrightarrow{F}_{i2} = \overrightarrow{0}}$$

8.4.1 Conséquences

▶ *Conservation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}$.*

$$\boxed{\overrightarrow{F}(ext) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{P} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{V}_G = \overrightarrow{cte}}$$

▶ $\overrightarrow{V}_G = \overrightarrow{Cte}$ *donc le référentiel barycentrique est **galiléen**.*
▶ *Conservation de l'énergie mécanique barycentrique*

$$\boxed{E_m^* = \mathbf{E}c^* + \mathbf{E}p(int) = cte}$$

▶ *Le moment cinétique barycentrique est conservé :*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_G}(int) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma^*} = \overrightarrow{cte}}$$

Autres détails voir chapitre 6.

8.4.2 Réduction canonique :Mobile réduit équivalent

*On a établit que dans **le répère barycentrique** $\mathcal{R}^*$ que :*

- $\overrightarrow{\sigma^*} = \overrightarrow{r} \wedge \mu\overrightarrow{V}^*$
- $\mathbf{E}c^* = \dfrac{1}{2}\mu\overrightarrow{V}^{*2}$
- $\dfrac{d\overrightarrow{V}^*}{dt} = \dfrac{\overrightarrow{F}_{i2}}{\mu} + \dfrac{\overrightarrow{F}_{e2}}{m_2} - \dfrac{\overrightarrow{F}_{e1}}{m_1} = \dfrac{\overrightarrow{F}_{i2}}{\mu} \Longrightarrow$

$$\boxed{\mu\frac{d\overrightarrow{V}^*}{dt} = \overrightarrow{F}_{i2}}$$

*On conclut : **Dans le repère barycentrique le système isolé de deux points est équivalent à un seul point P fictif (nommée mobile équivalent)tel que** $GP = r = M_1M_2$ **et animé de la vitesse** $\overrightarrow{V}^* = \overrightarrow{V}$ **soumis à la force** $\overrightarrow{F}_{i2}$:c'est la réduction canonique.*

Remarque- 31 *:*
Connaissant le mouvement du barycentre G du système dans le référentiel $\mathcal{R}$(c'est à dire $\overrightarrow{OG}(t)$) et le mouvement du mobile équivalent dans le repère barycentrique $\mathcal{R}^*$ (c'est à dire $\overrightarrow{r}(t)$) on peut déduire le mouvement des deux points M_1 et M_2 :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_1(t) = \overrightarrow{OG}(t) - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r}(t)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_2(t) = \overrightarrow{OG}(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r}(t)}$$

Conclusion :

La trajectoire du mobile équivalent (ou réduit) dans le référentiel barycentrique donne, par homothétie, celles des deux particules dans ce référentiel