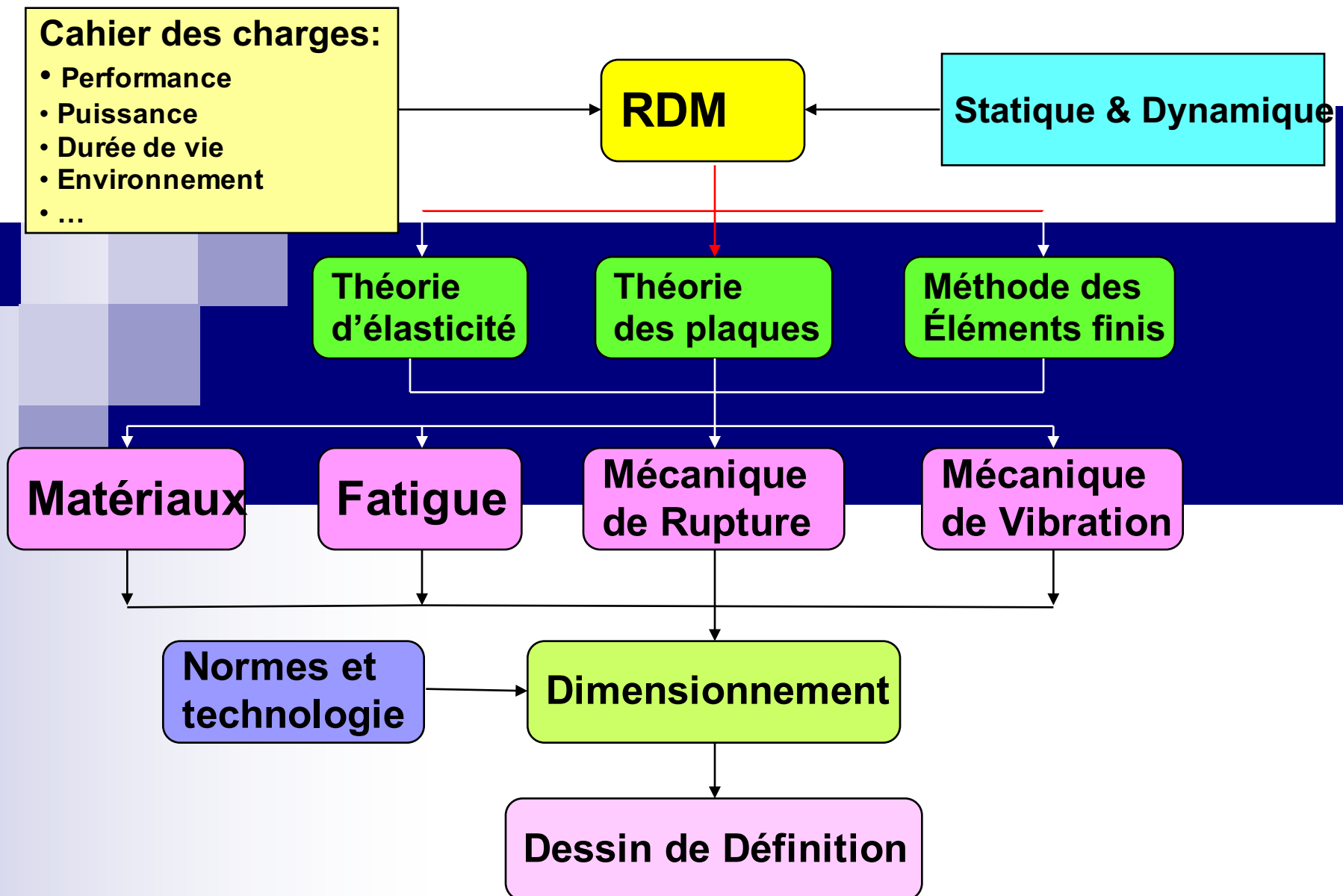


Résistance des Matériaux

Hypothèses de la Résistance des Matériaux



La RDM au sein du bureau d'études



Afin de résoudre les problèmes de **conception** ou de **dimensionnement**, la **Résistance Des Matériaux** permet de déterminer les **contraintes** et les **déformations induites** lors du fonctionnement à l'aide des équations liant:

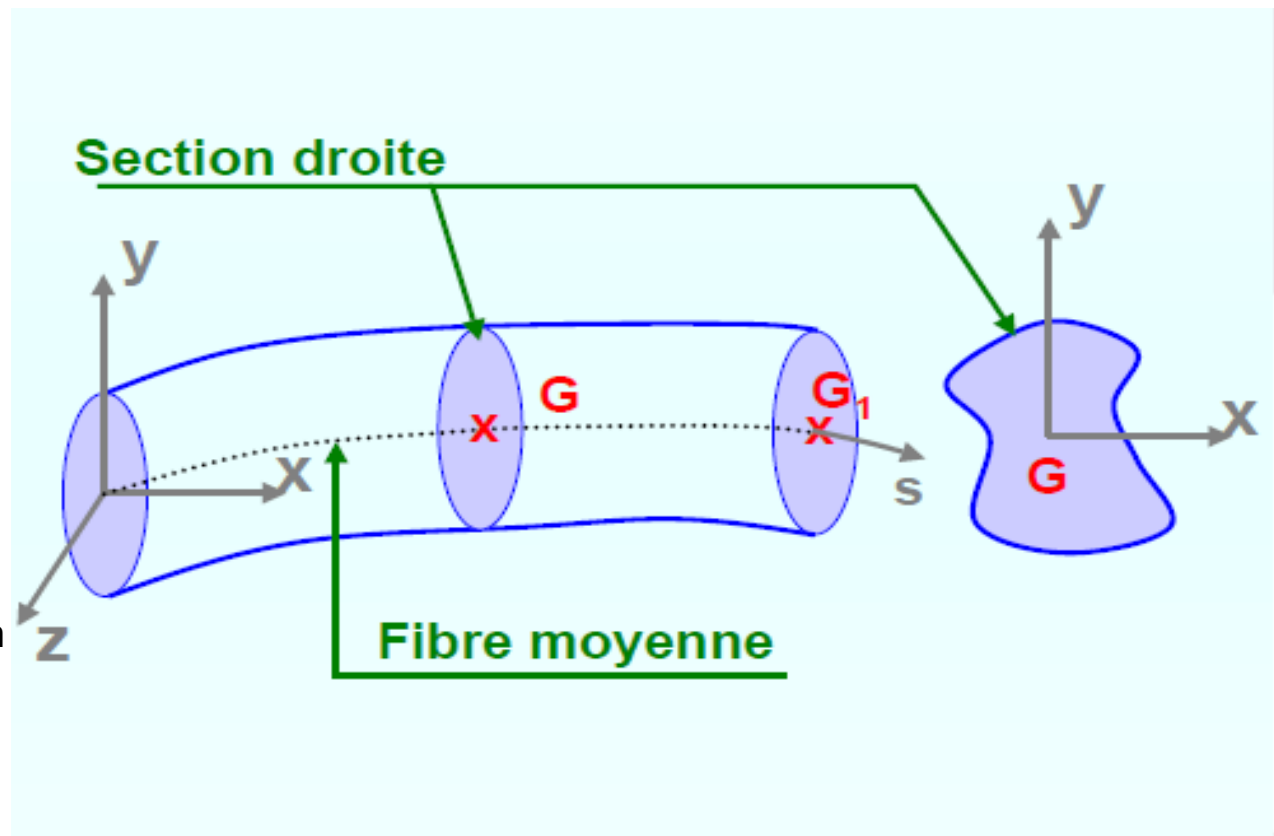
- ➔ **L'état de chargement**
- ➔ **Les caractéristiques mécaniques**
- ➔ **La géométrie.**

Objet de la Résistance des Matériaux

La résistance des matériaux cherche à déterminer par le calcul les dimensions des organes d'une machine ou des éléments d'une construction, afin qu'ils supportent les efforts auxquels ils sont soumis dans les meilleures conditions de sécurité et d'économie de matière.

Géométrie

- section droite
- fibre moyenne
- $R > 20 h$



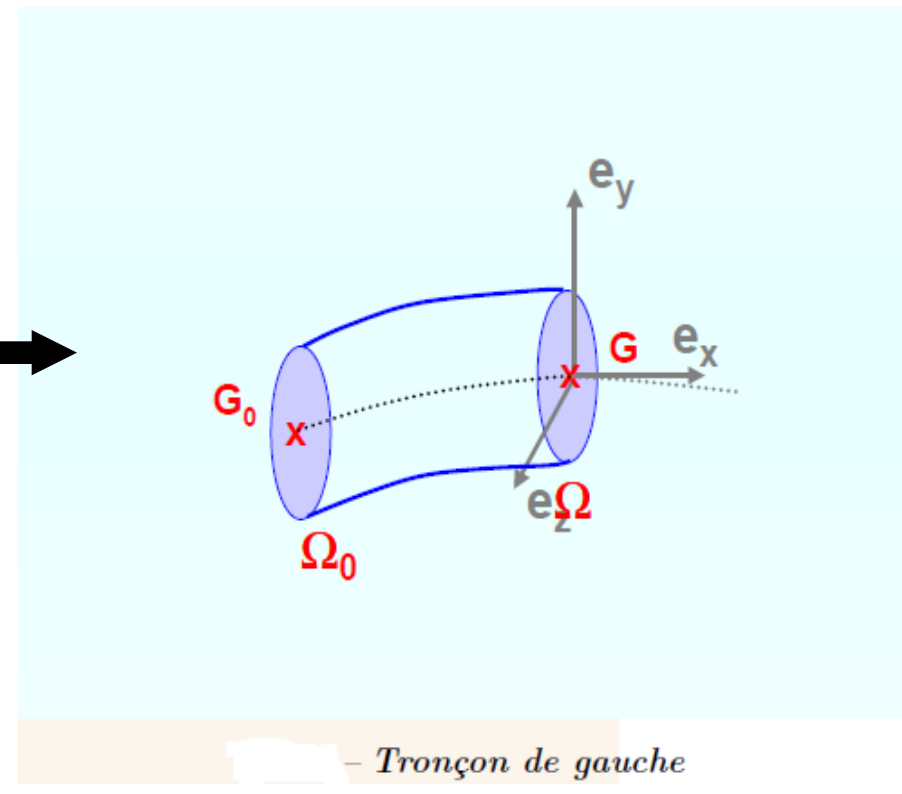
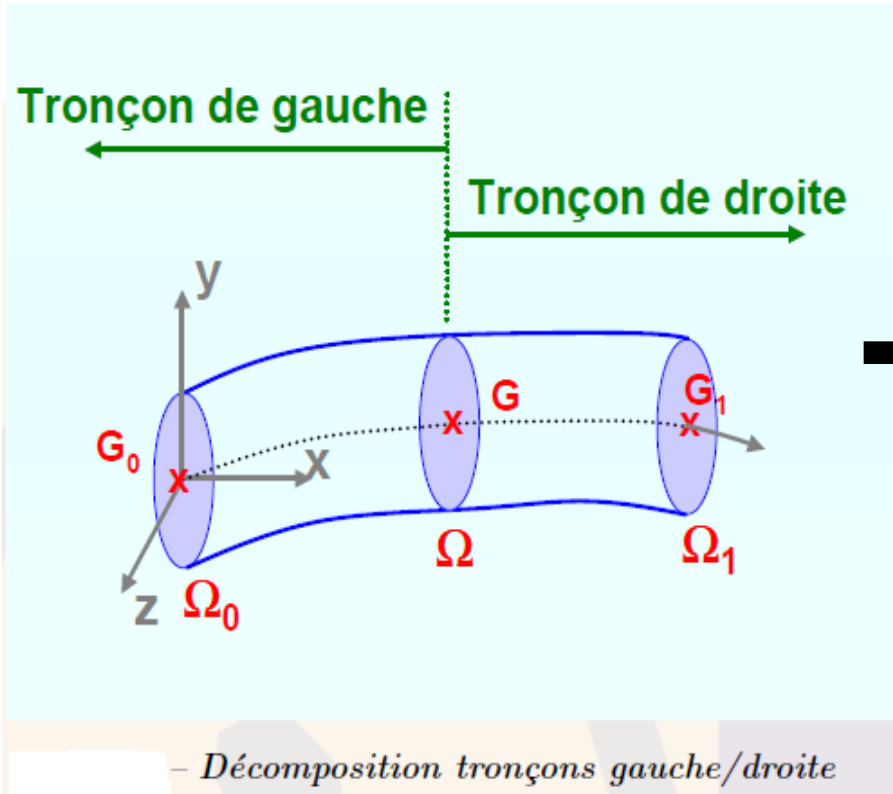
– *Hypothèse Géométrique*

R: rayon de courbure de la ligne moyenne

h: la plus grande dimension de la section droite

Contraintes en un point

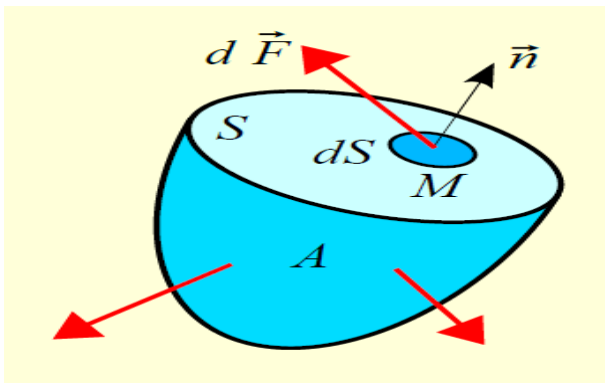
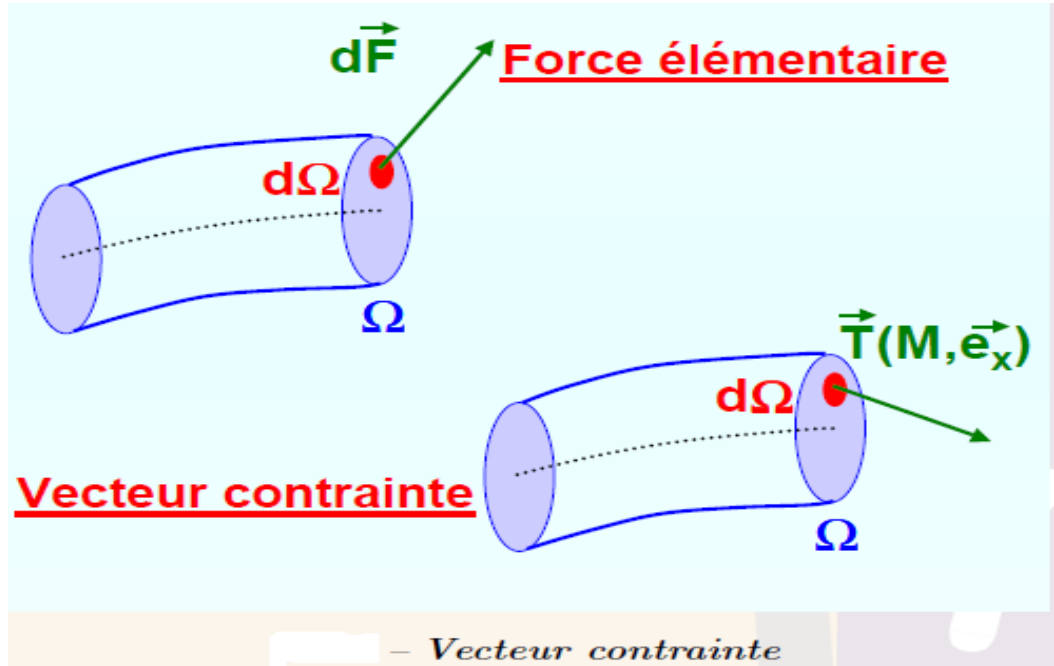
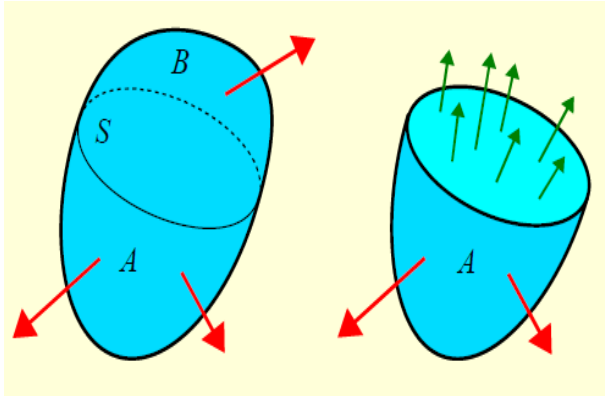
Une poutre de section initiale et de section finale est soumise à un torseur de forces extérieures. Cette poutre est supposée en équilibre statique.



- Comme la poutre est globalement en équilibre statique; on a :

$$\begin{bmatrix} \vec{F}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}_e \end{bmatrix}_g + \begin{bmatrix} \vec{F}_e \end{bmatrix}_d$$

Contraintes en un point



$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

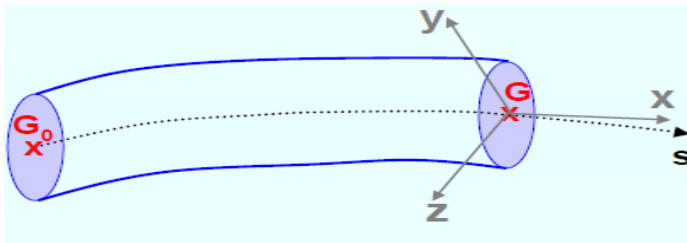
Définition . (Vecteur contrainte) Le vecteur $\vec{T}(M, \vec{e}_x)$ est par définition le vecteur contrainte au point $M(s_0, y, z)$ de la surface (Ω) de normale unitaire sortante \vec{e}_x .

$d\vec{F}$ est la résultante élémentaire des actions du tronçon de droite sur le tronçon de gauche transmises à travers la surface élémentaire $d\Omega$ de (Ω) .

Équation d'équilibre en RDM

Torseur des forces extérieures de gauche

Torseur des forces extérieures de gauche par définition, est le torseur des forces extérieures de gauche au point G.



Repère orthogonal direct, centre en G, pour le tronçon de gauche

Le torseur des forces extérieures de gauche a pour éléments de réduction en G:

$$\begin{cases} \vec{R}_g \\ \vec{M}_G(g) \end{cases} \begin{array}{l} \text{Résultante} \\ \text{Moment résultant par rapport à G} \end{array}$$

La décomposition des éléments de réduction du torseur de cohésion :

$$\vec{R}_g = \vec{N} + \vec{T} \quad \text{avec} \quad \vec{N} = N \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{T} = T_y \vec{e}_y + T_z \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_G(g) = \vec{C} + \vec{M} \quad \text{avec} \quad \vec{C} = C \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{M} = M_y \vec{e}_y + M_z \vec{e}_z$$

Conclusion

Le problème le plus général est celui pour lequel les six composantes sont non nulles. Les chapitres suivants seront consacrés au cas où une seule des composantes est non nulle (solicitations simples). Ainsi les différentes sollicitations simples sont groupées dans le tableau suivant :

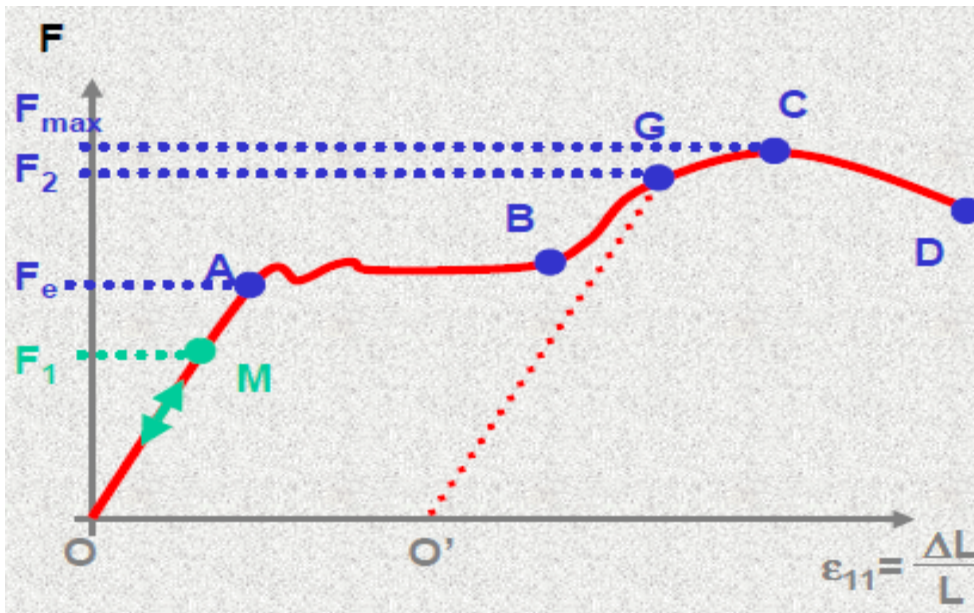
N	T	C	M		Contrainte
$\neq 0$	0	0	0	Traction simple (si $N < 0$) Compression simple (si $N > 0$)	$\sigma_{xx} \neq 0$ et $\tau = 0$
0	$\neq 0$	0	0	Cisaillement pur	$\sigma_{xx} = 0$ et $\tau \neq 0$
0	0	$\neq 0$	0	Torsion pure	$\sigma_{xx} = 0$ et $\tau \neq 0$
0	0	0	$\neq 0$	Flexion pure	$\sigma_{xx} \neq 0$ et $\tau = 0$
$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	Flexion composée	$\sigma_{xx} \neq 0$ et $\tau = 0$
0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	Flexion simple	$\sigma_{xx} \neq 0$ et $\tau \neq 0$

Traction simple

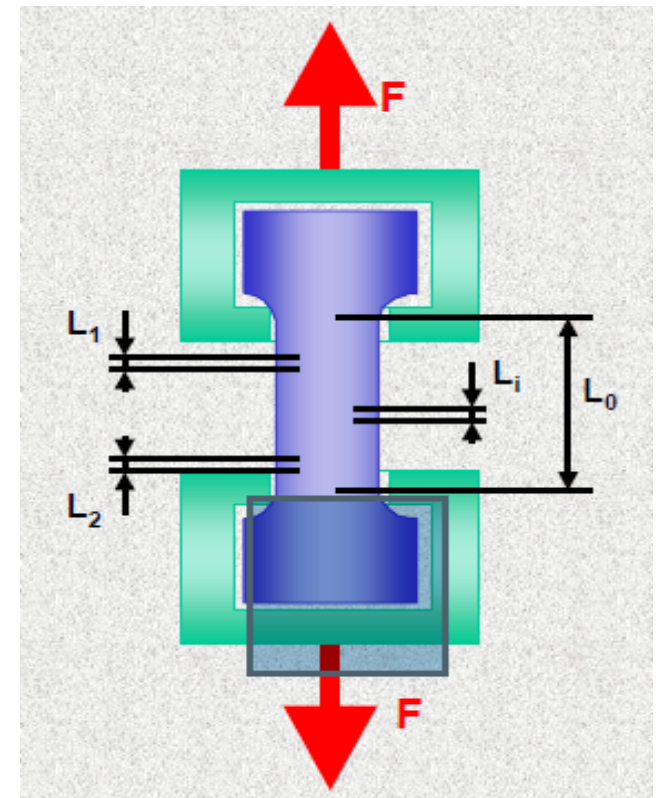
Hypothèses traction

- Les hypothèses classiques de la R.D.M sont supposées vérifiées, avec les particularités suivantes :
- La ligne moyenne est une droite de longueur L
 - Cette longueur L est supérieure à cinq fois la plus grande dimension de la section droite
 -

Courbe conventionnelle de traction



Courbe conventionnelle de traction d'un acier



Principe de l'essai de traction normalisé

Traction simple

En tenant compte des équations d'équilibre et des hypothèses de la traction simple, on montre que la contrainte de traction vérifie:

$$\sigma = \frac{F}{S} = -\frac{N}{S}$$

Relations contraintes / déformations

Dans le domaine élastique, pour une éprouvette constituée d'un matériau élastique linéaire soumise à un effort de traction, on vérifie :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E \epsilon_1 \\ \epsilon_2 &= \epsilon_3 = -\nu \epsilon_1 \\ \sigma_1 &= \frac{F}{S} \end{aligned}$$

Dimensionnement d'une poutre soumise à une traction simple

En pratique, on détermine la contrainte utile ou admissible à partir de la limite élastique par une relation du type:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_e}{\alpha}$$

• Ce coefficient est sous la forme d'un produit de coefficients d'incertitude,

$$\alpha = \alpha_m \cdot \alpha_e \cdot \alpha_f \cdots$$

Traction simple

- Ce coefficient est sous la forme d'un produit de coefficients d'incertitude,

$$\alpha = \alpha_m \cdot \alpha_e \cdot \alpha_f \cdots$$

m: coefficient pour couvrir l'incertitude sur l'homogénéité du matériau

e: coefficient pour couvrir les incertitudes sur les caractéristiques mécaniques du matériau

f: coefficient pour couvrir l'incertitude sur les charges appliquées.

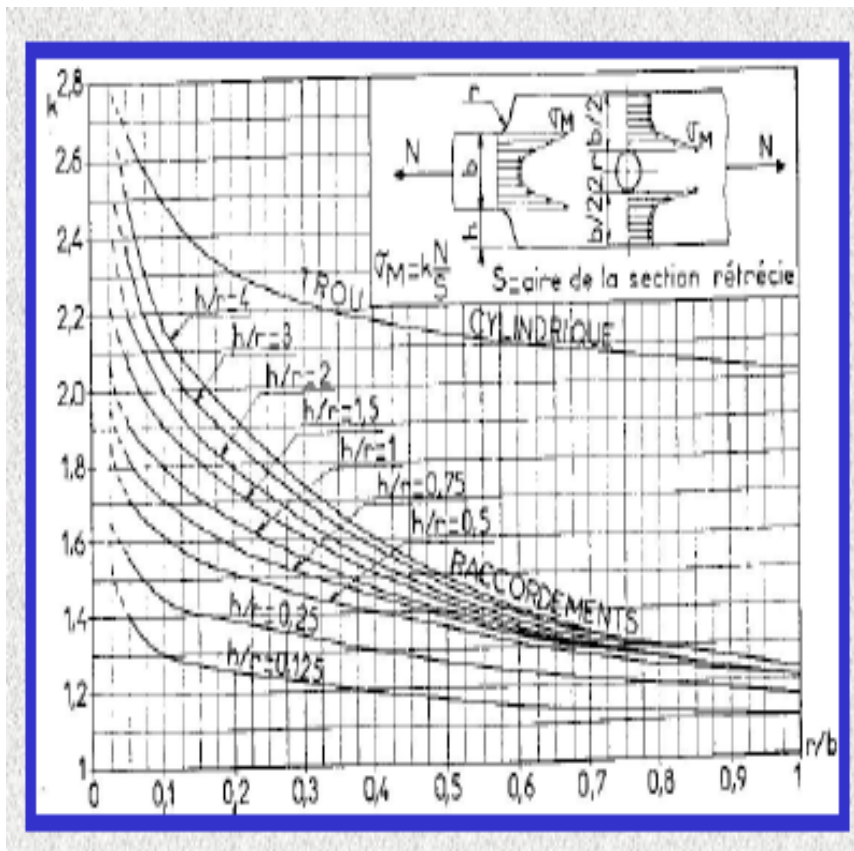
Dans tous les cas (sauf en aéronautique) est supérieur ou égal à 1.5.

- **Condition de résistance**

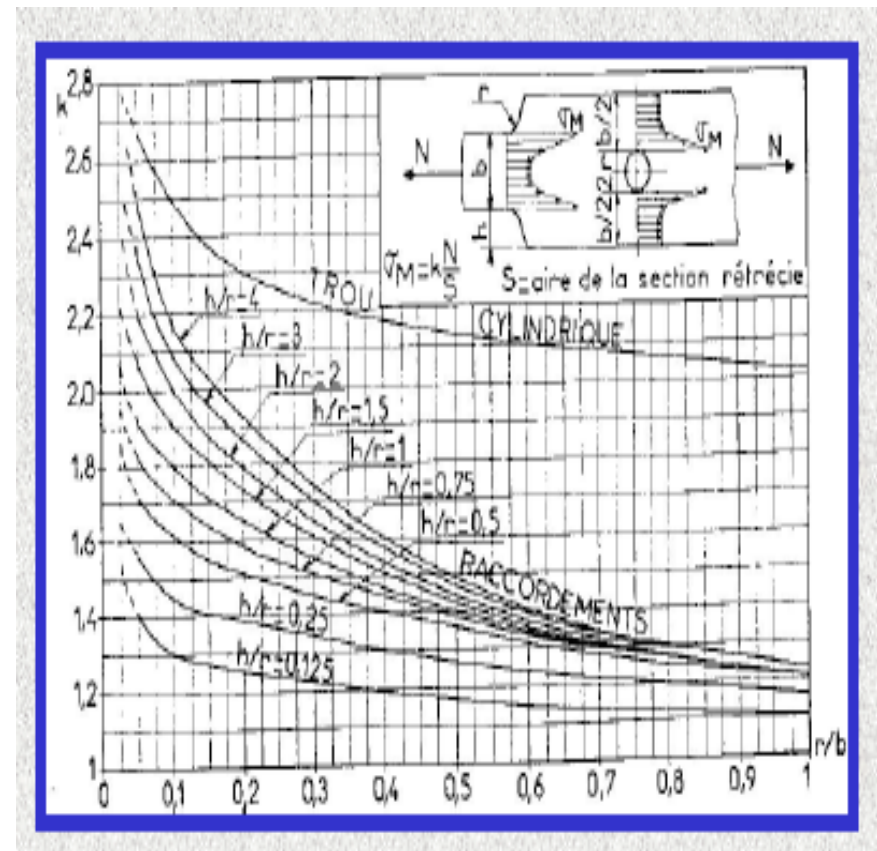
- **Condition de rigidité**

Traction simple

Les coefficients de concentration de contraintes dépendent de la géométrie de la pièce et de la discontinuité ainsi que de la sollicitation.



- Coefficients de concentration de contraintes pour des poutres entaillées



- Coefficients de concentration de contraintes pour des trous et des raccordements

Compression simple

☛ Les résultats précédents établis pour la traction s'appliquent à la compression simple, moyennant toutefois certaines adaptations des signes et restrictions sur la forme des pièces:

On se protège d'abord contre le phénomène de flambement

(l'effort de compression reste inférieur à la charge critique de flambement)

Exercice 1

Une barra en acier ($R_e = 250\text{MPa}$; $E = 2.10^5 \text{ MPa}$) de longueur $l = 0.8\text{m}$, supporte une masse $m = 8000 \text{ Kg}$. ($g = 10 \text{ N/Kg}$) (Voire figure)

1. Calculer le diamètre que devra avoir cette barra pour supporter cette masse avec un coefficient de sécurité $s = 2.5$.

Calculer l'allongement que pourra avoir la barra.

1. Calculer la valeur de la contrainte.

Exercice 2

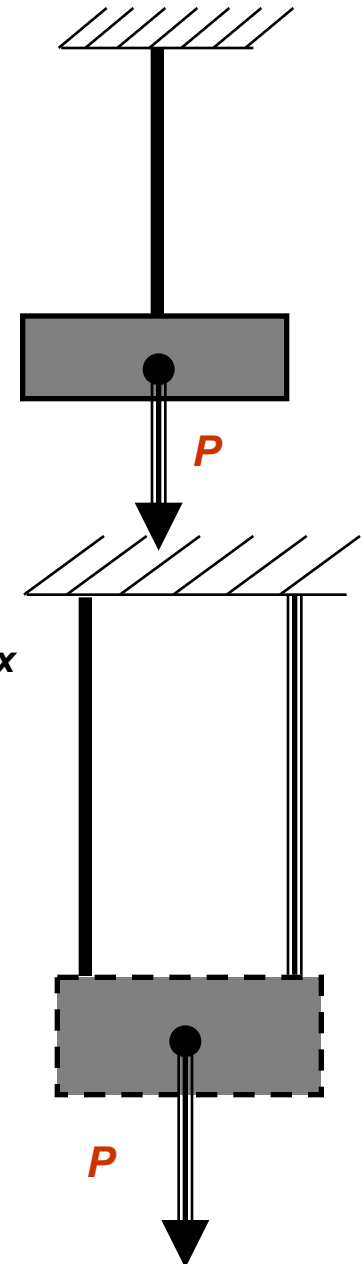
Une charge P est supportée par deux barra de même longueur et de matériaux différents :

une barra est en acier ($R_{e1} = 350\text{MPa}$; $E_1 = 2.10^5 \text{ MPa}$) $S_1 = 100 \text{ mm}^2$ et $L_1 = 1\text{m}$, et l'autre barra est en aluminium ($R_{e2} = 200\text{MPa}$; $E_2 = 72000 \text{ MPa}$) $S_2 = 150\text{mm}^2$ et $L_2 = 1\text{m}$.

1. Donner les expressions littérales des contraintes de traction σ_1 et σ_2 .

1. Déterminer la charge limite de P pour laquelle un des deux barra atteint sa limite élastique.

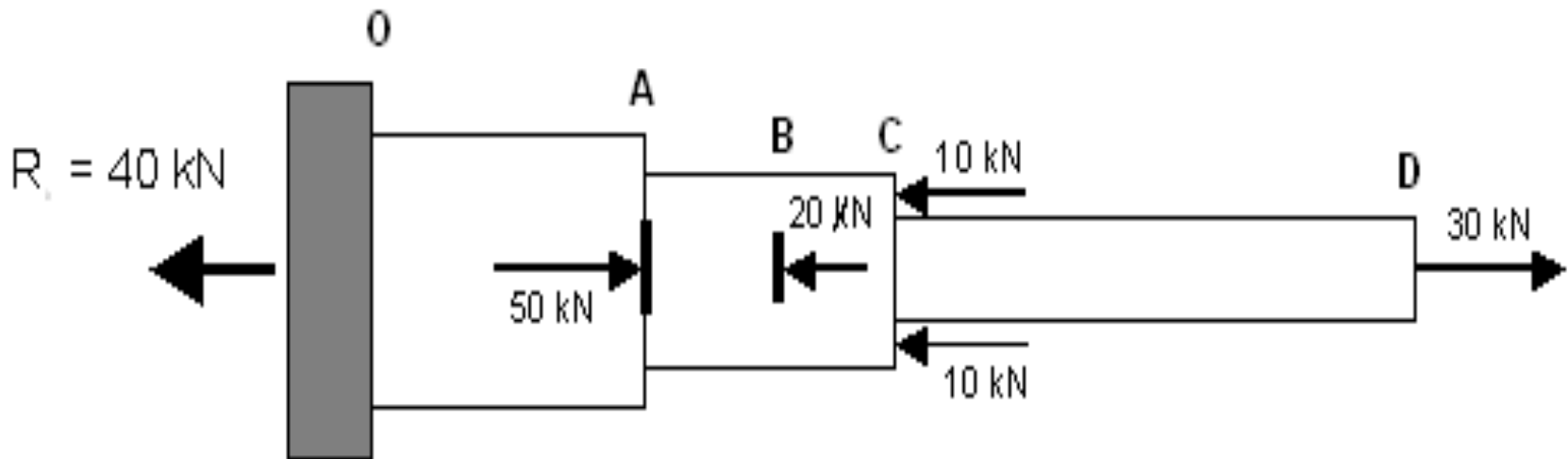
1. Quel élément a atteint la limite élastique ? Exprimer la valeur de l'allongement à ce moment.



Exercice 1

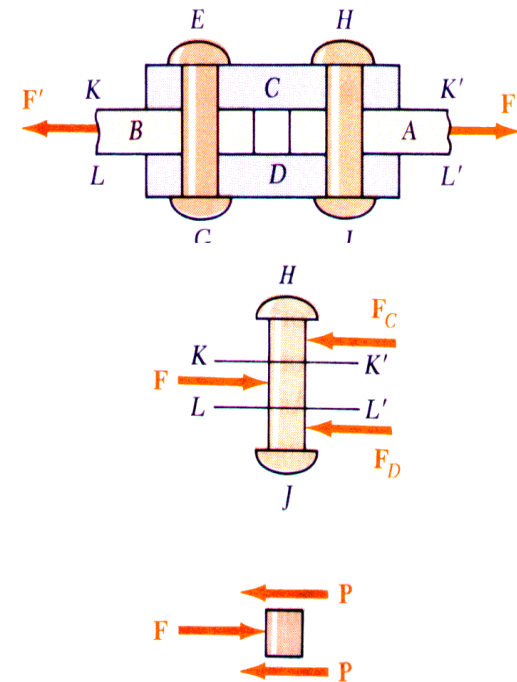
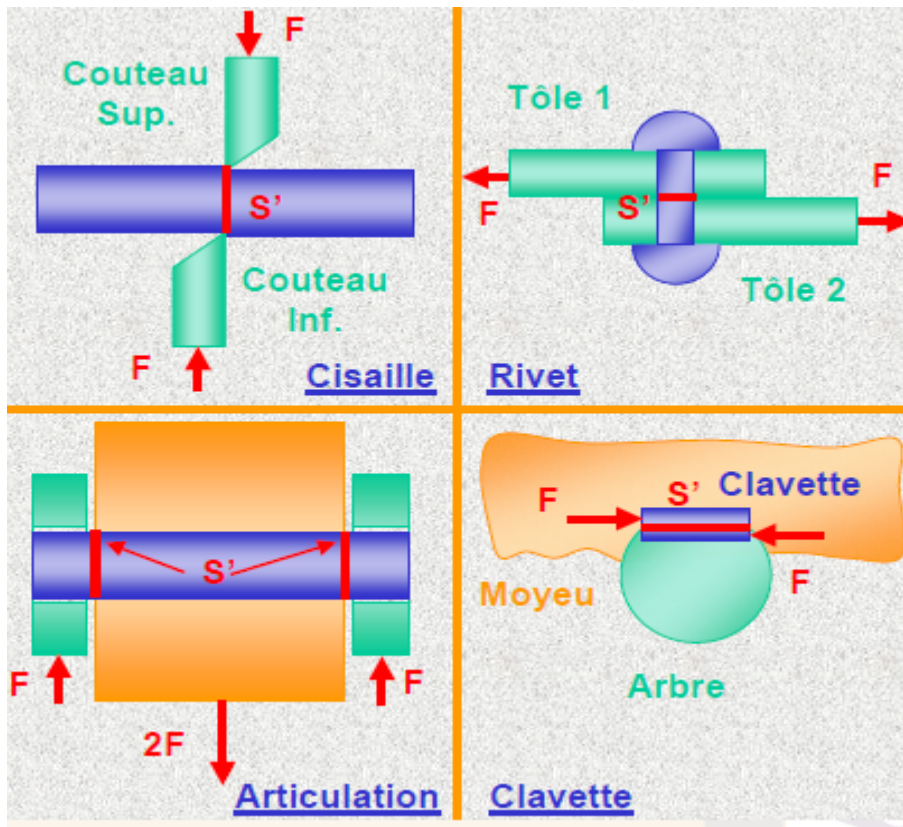
Un élément d'arbre OD en acier ($E = 200000 \text{ MPa}$) peut être représenté par la figure suivante. Il est soumis à un ensemble d'actions d'intensités différentes (Voire figure). Avec :
 $OA = 30\text{mm}$, $AB = 15\text{mm}$, $BC = 15\text{mm}$; $CD = 60\text{mm}$. Et $d_1 = 10 \text{ mm}$, $d_2 = 18\text{mm}$, $d_3 = 25 \text{ mm}$

- 1) Calculer la contrainte normale qui s'exerce sur chaque partie de l'arbre
- 2) Calculer l'allongement correspondant Δl de cet arbre.



Cisaillement pur

Les charges sont supposées appliquées de sorte que seul l'effort tranchant est différent de zéro. Ceci suppose que cet effort tranchant est localisé dans une section droite, sans possibilité d'être accompagné d'un moment de flexion. La notion de cisaillement pur se rapporte non pas à un corps mais à une section donnée d'un corps.



Exemples de cisaillement

Cisaillement pur

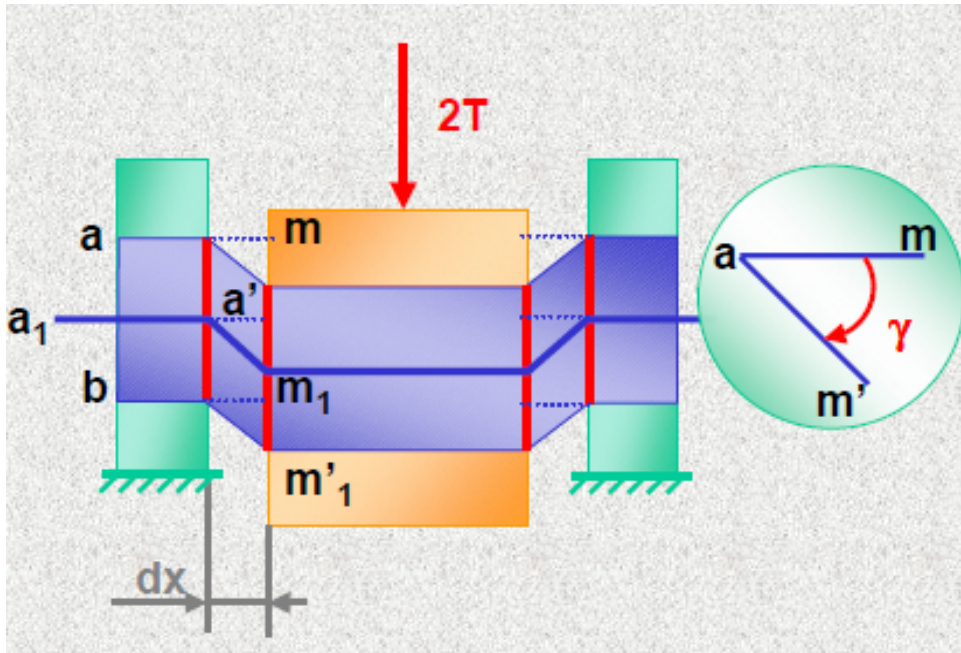
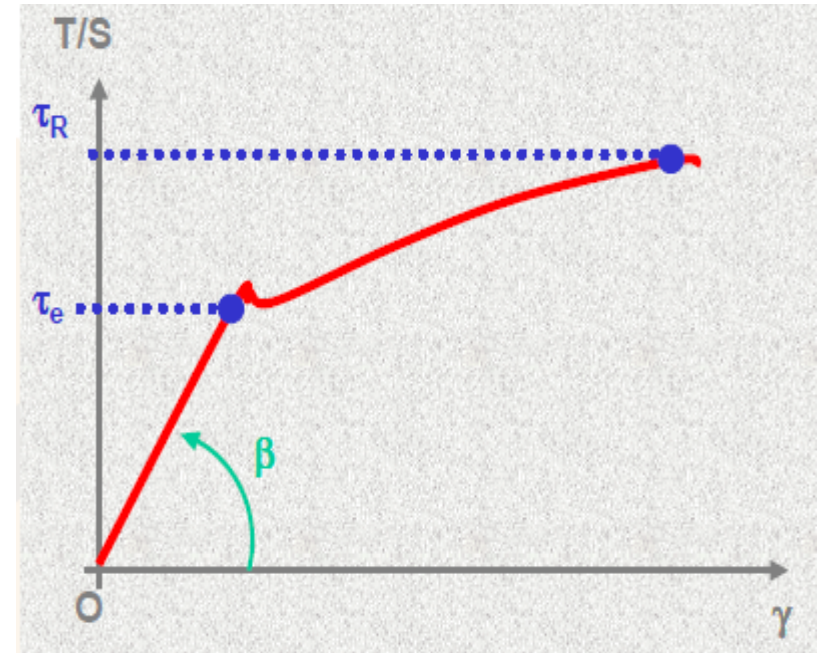


Schéma de principe de l'essai de cisaillement



Courbe de cisaillement pur

- Dans le domaine élastique, on relie la contrainte de cisaillement à l'angle de cisaillement par :

$$\tau = \mu \gamma = G \gamma \text{ avec } \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

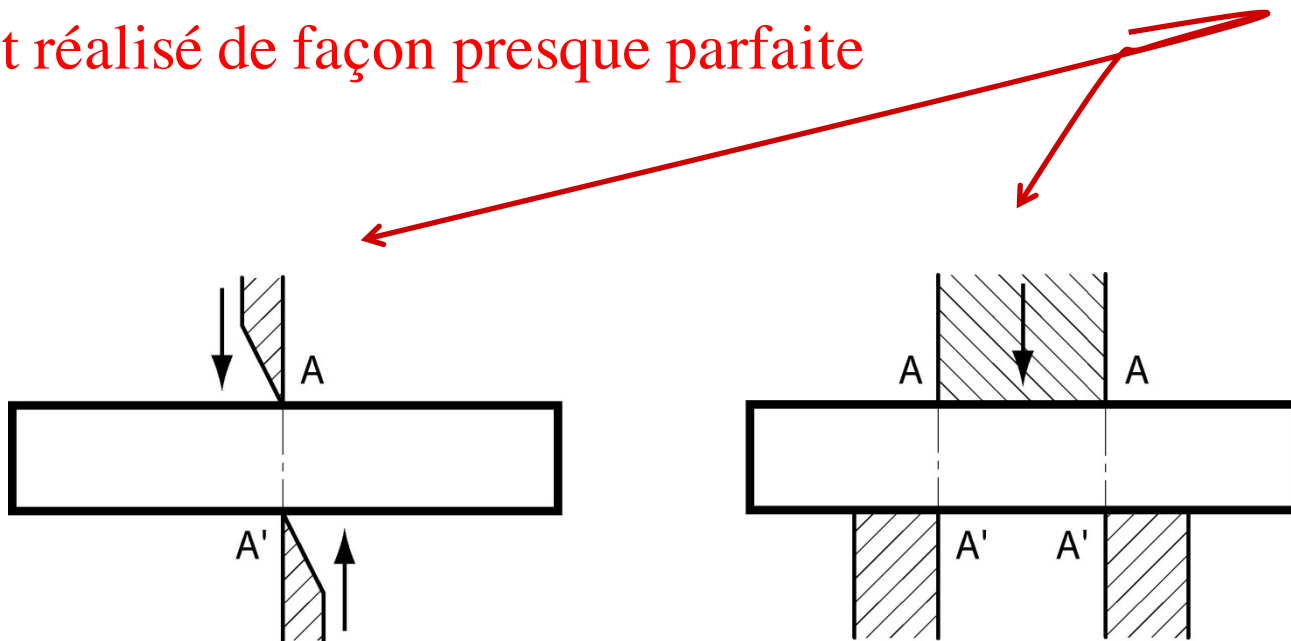
G : Module de Coulombe

Cisaillement pur

La section normale F d'un solide est soumise au *cisaillement simple* quand le torseur des efforts intérieurs se réduit à l'*effort tranchant* T dans le plan de F

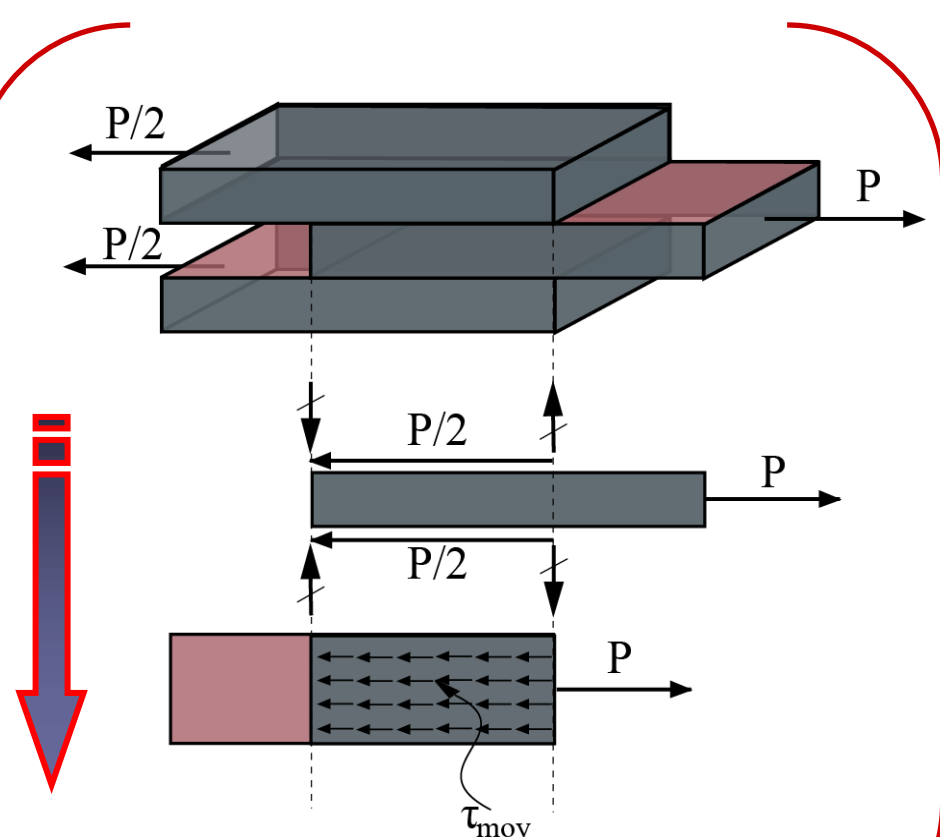
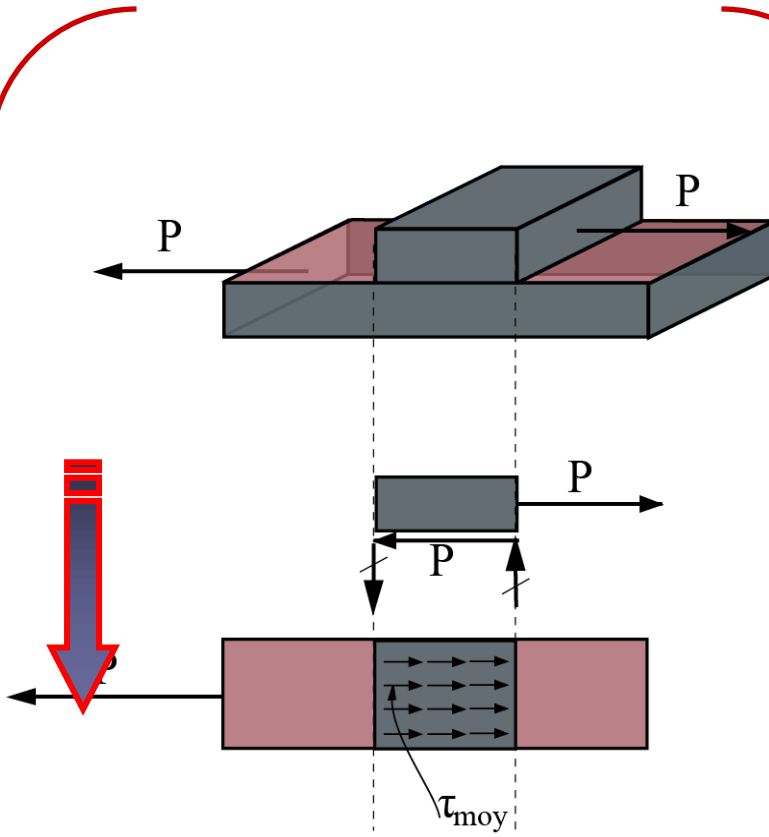
Le cisaillement simple ne peut jamais exister dans un solide entier.

Il est réalisé de façon presque parfaite



exemples

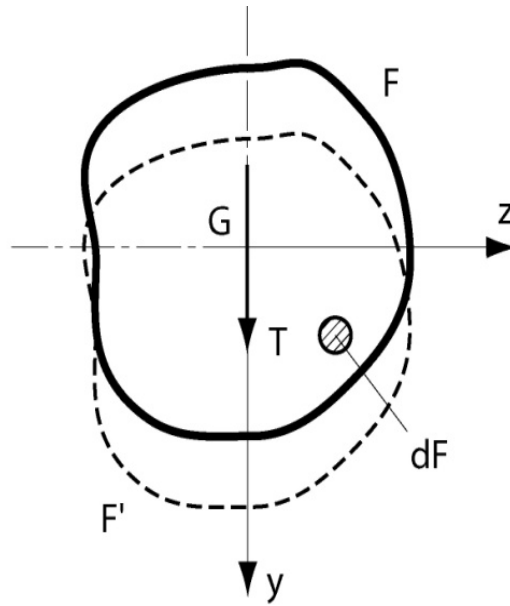
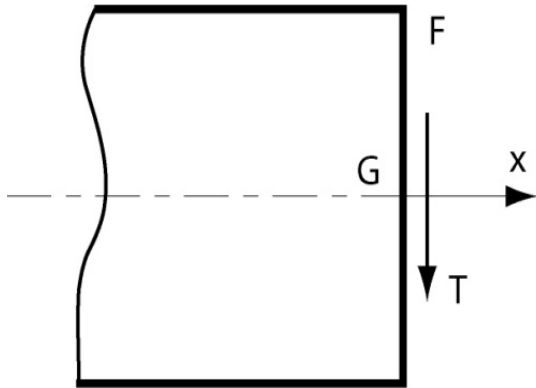
contrainte de cisaillement



une section plane avant déformation
reste plane après déformation



$$\tau_z = \sigma = 0$$



$$\tau_y = \text{constante}$$



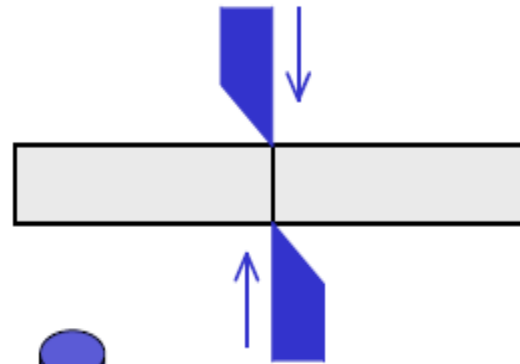
$$T = \tau_y \iint_F dF = \tau_y F$$



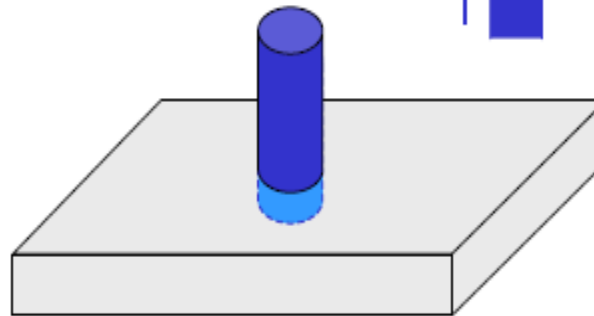
$$\tau_y = \tau = \frac{T}{F}$$

EXEMPLES

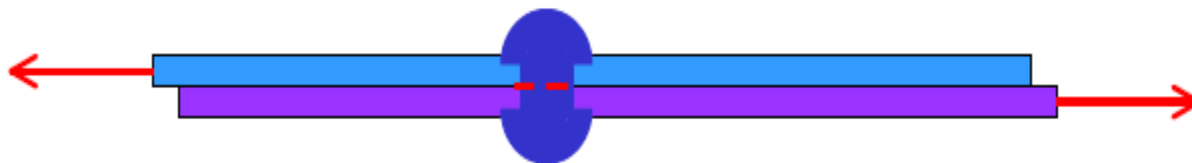
- cisaillement pur



- poinçonnage

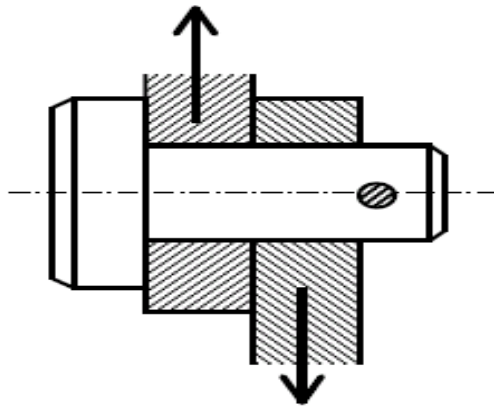


- rivetage

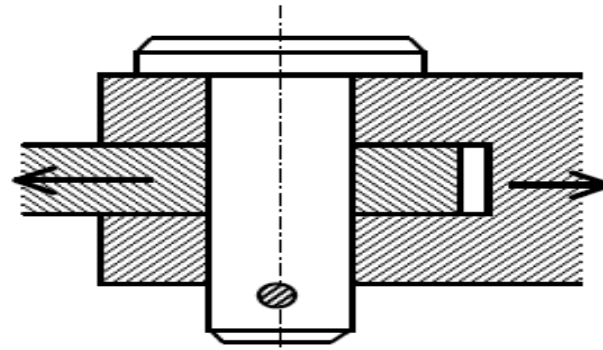


Sur ces deux articulations, l'axe doit supporter un effort de cisaillement de 15000N.
Il est en acier (S275 ; $R_g = 185 \text{ MPa}$) et de module d'élasticité transversale $G = 80000 \text{ MPa}$,
le coefficient de sécurité est de $s = 3$.

a)- Montage en porte à faux



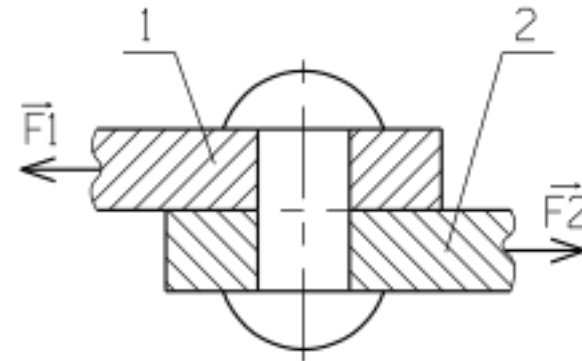
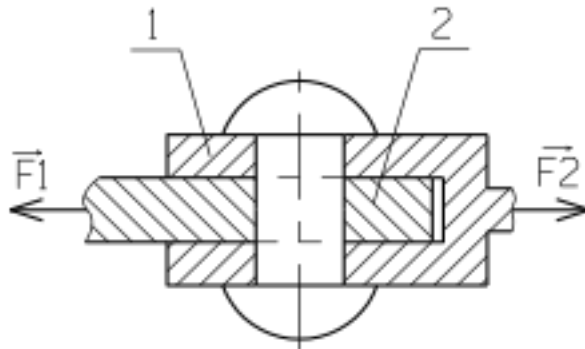
b)- Montage en chape



Déterminer pour les deux montages :

1. Le diamètre minimal de l'axe.
2. La contrainte tangentielle dans l'axe
3. L'angle de déformation (glissement γ)
4. Faire une comparaison et conclure.

•Rivetage



Clavetage

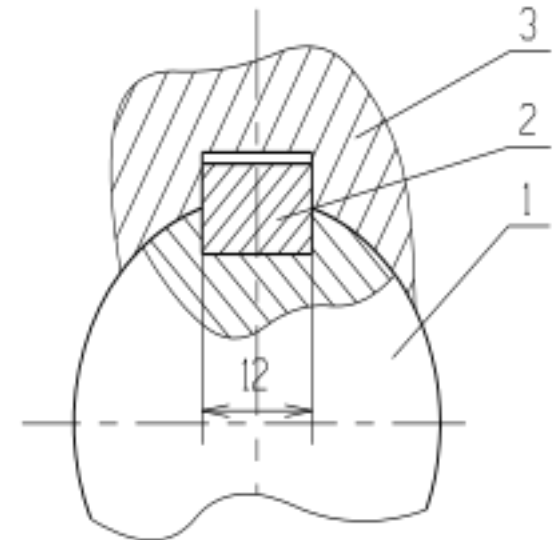
La liaison en rotation entre l'arbre 1 et l'alésage 3 ci-dessous est obtenue

par une clavette parallèle de forme B. L'effort de cisaillement étant de 650daN. La clavette étant en acier C35 ($R_e = 335\text{N/mm}^2$)

et de largeur 12mm. La sécurité sur ce montage devant être de 6,

on demande:

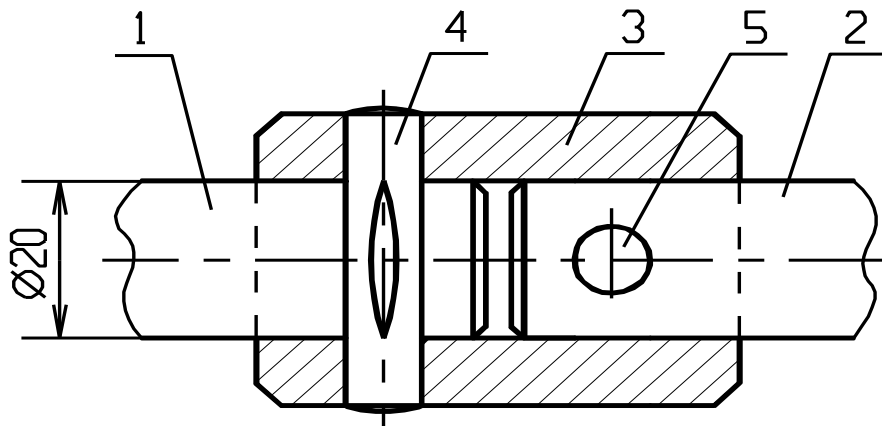
- 1.La résistance R_g de cette clavette.
- 2.La résistance pratique au cisaillement.
- 3.La surface minimale de la section de la clavette.
- 4.La longueur minimale de la clavette.
- 5.L'angle de glissement maximal de la section cisillée.



•Manchon de sécurité

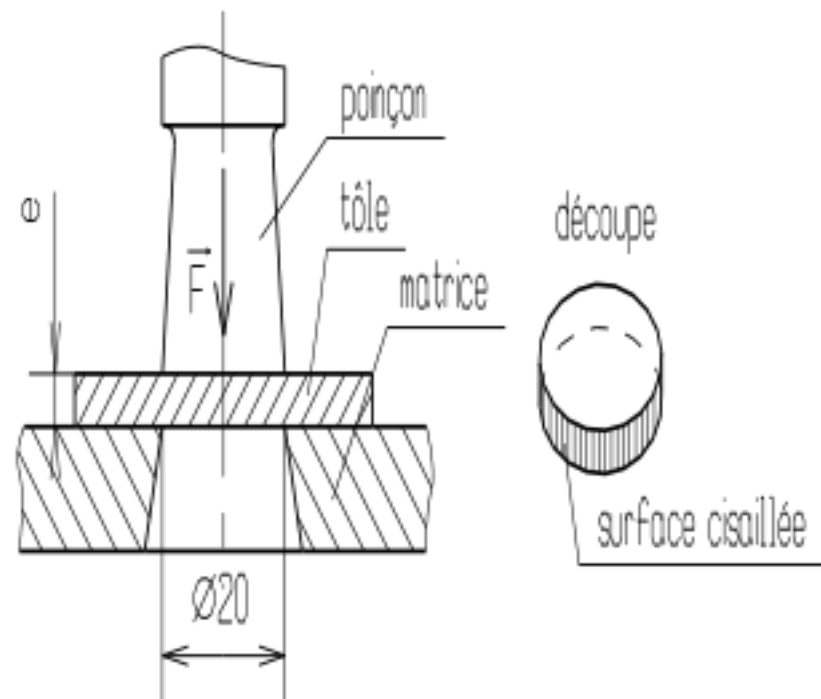
Pour protéger une chaîne de transmission agricole on utilise un dispositif de sécurité qui comprend un manchon 3 et 2 goupilles 4 et 5, qui doivent se cisailer si le couple à transmettre dépasse la valeur maximale prévue. Le diamètre de l'arbre 1 est de 20mm. La valeur maximale du couple à transmettre est fixée à 60N.m. Les goupilles ont le même diamètre d , elles sont en acier S185 ($R_{re} = 290\text{N/mm}^2$).

Calculer l'effort de cisaillement sur les goupilles dû au couple.
Calculer le diamètre des goupilles.

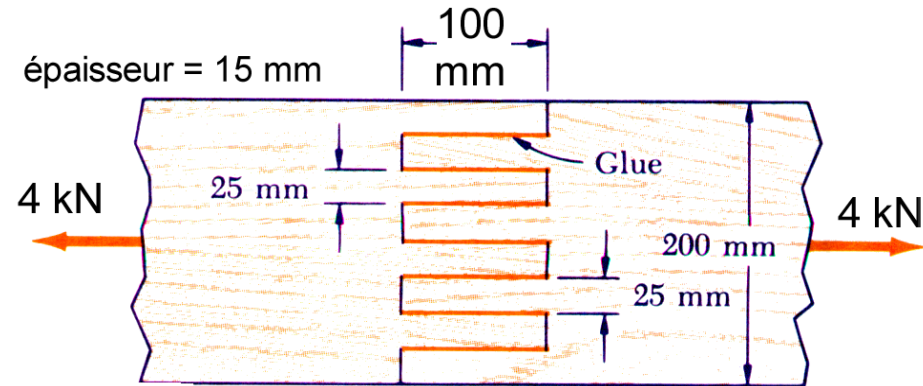


•Poinçonnage de tôle

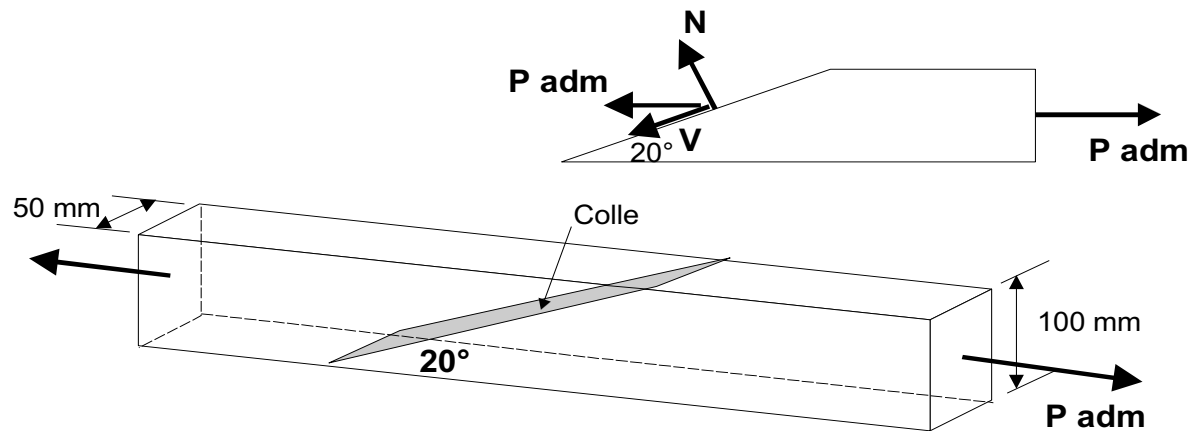
On veut poinçonner une tôle d'épaisseur $e = 4\text{mm}$ en acier S355 ($R_{re}=490\text{N/mm}^2$), le trou à poinçonner sera de diamètre 20mm.
Quel devra-t-êtré l'effort exercé par le poinçon ?
Quelle sera alors la contrainte de compression sur le poinçon ?



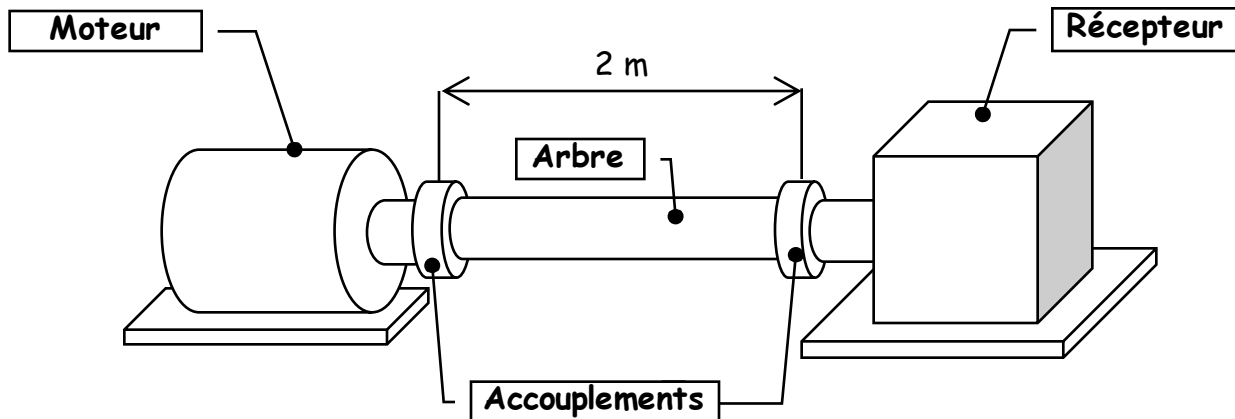
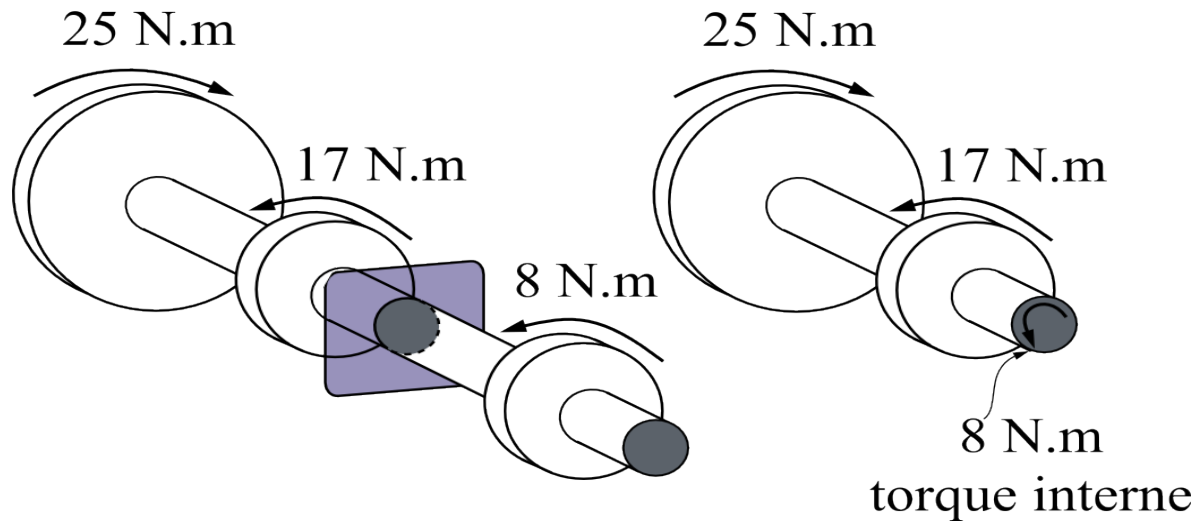
➤ Calculer la contrainte normale et la contrainte de cisaillement dans la colle de l'assemblage ci-dessous.



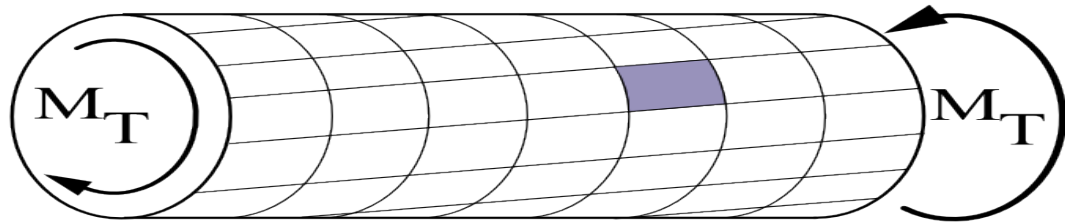
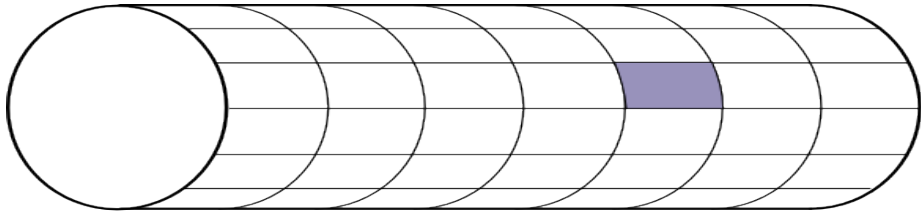
➤ À l'aide du schéma ci-dessous, calculer P_{adm} si $\sigma_{adm} = 2\text{MPa}$ et $\tau_{adm} = 1,5\text{MPa}$



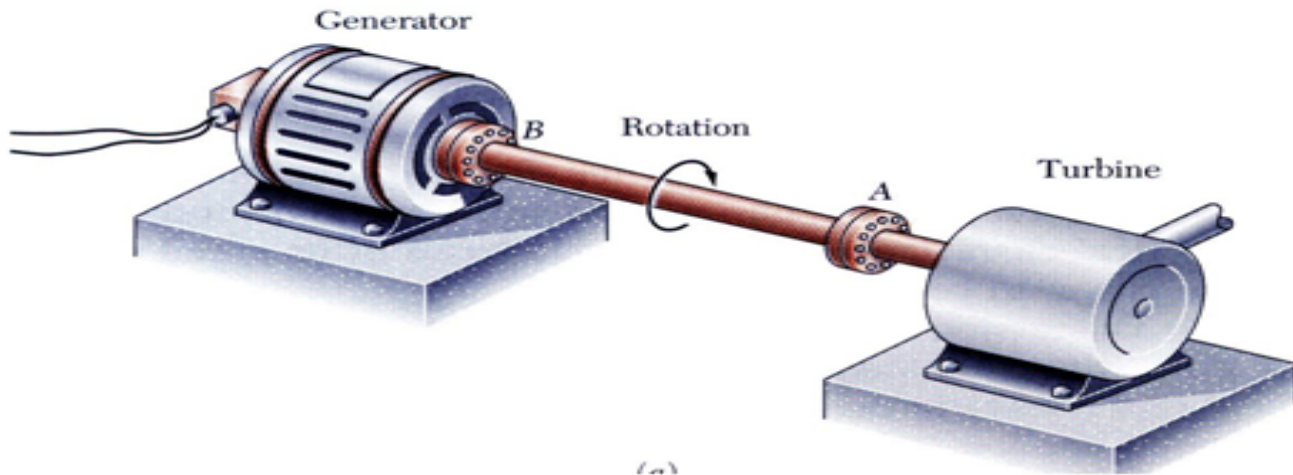
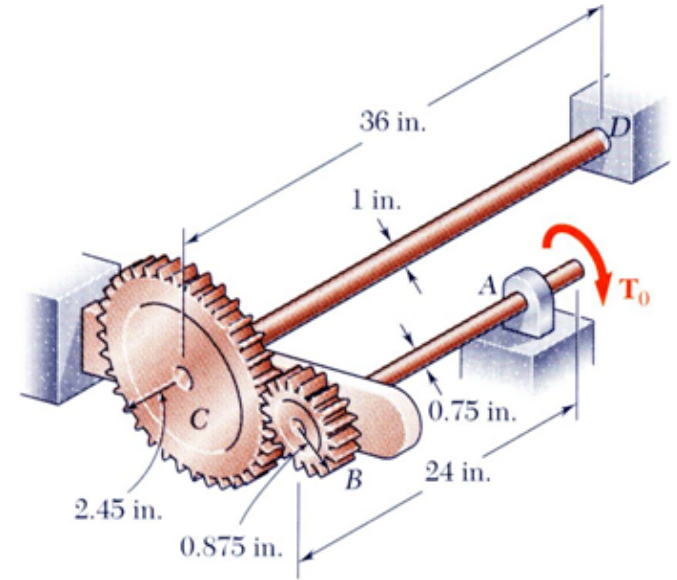
Torsion simple



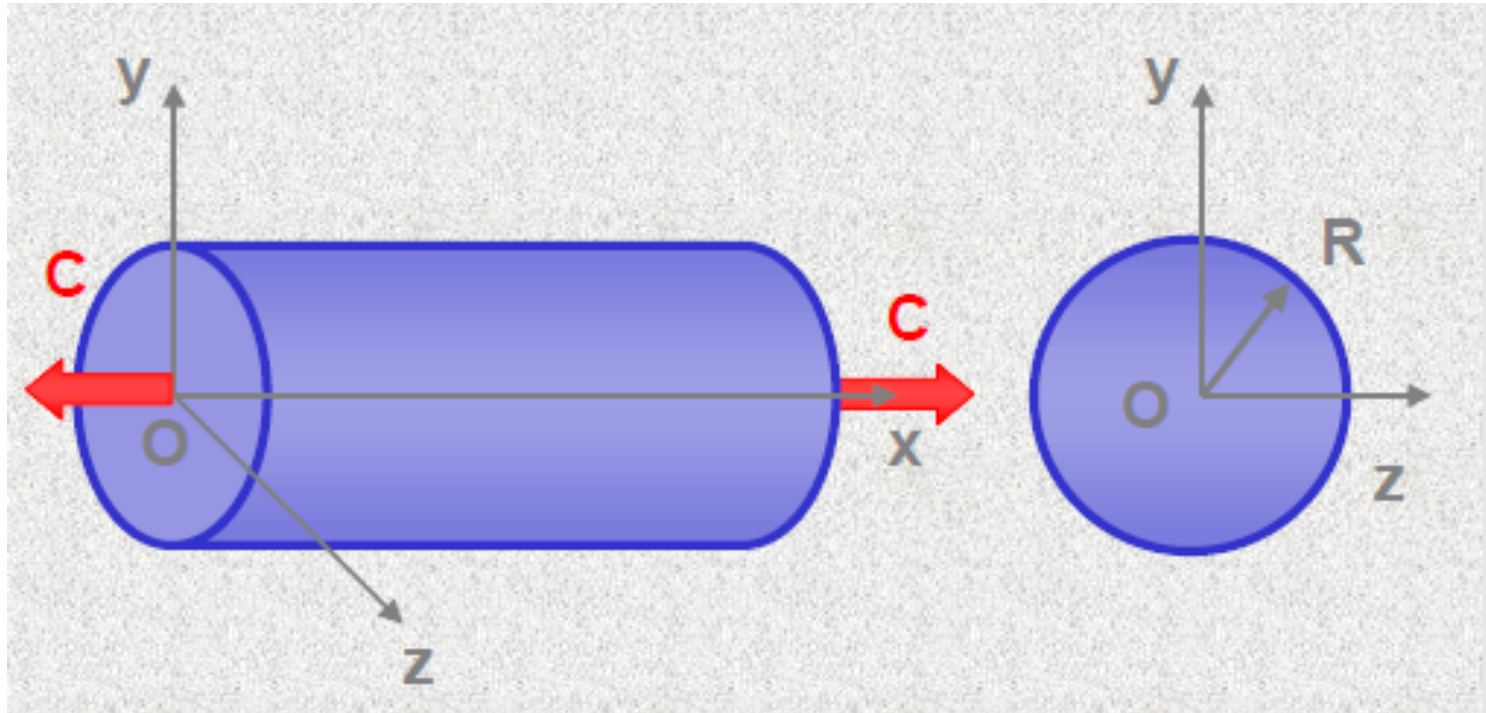
Torsion simple



Moment d torsion

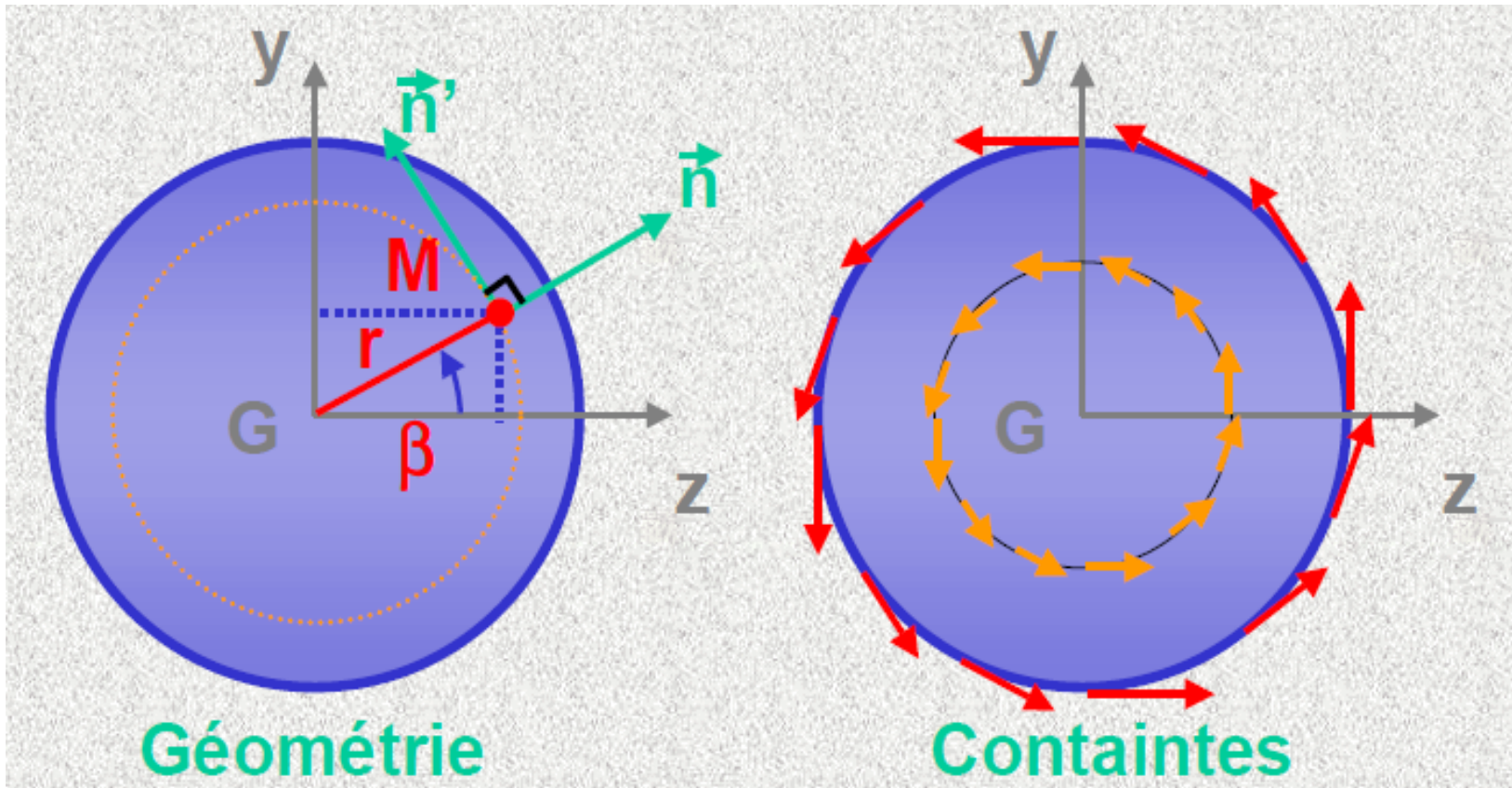


Torsion simple



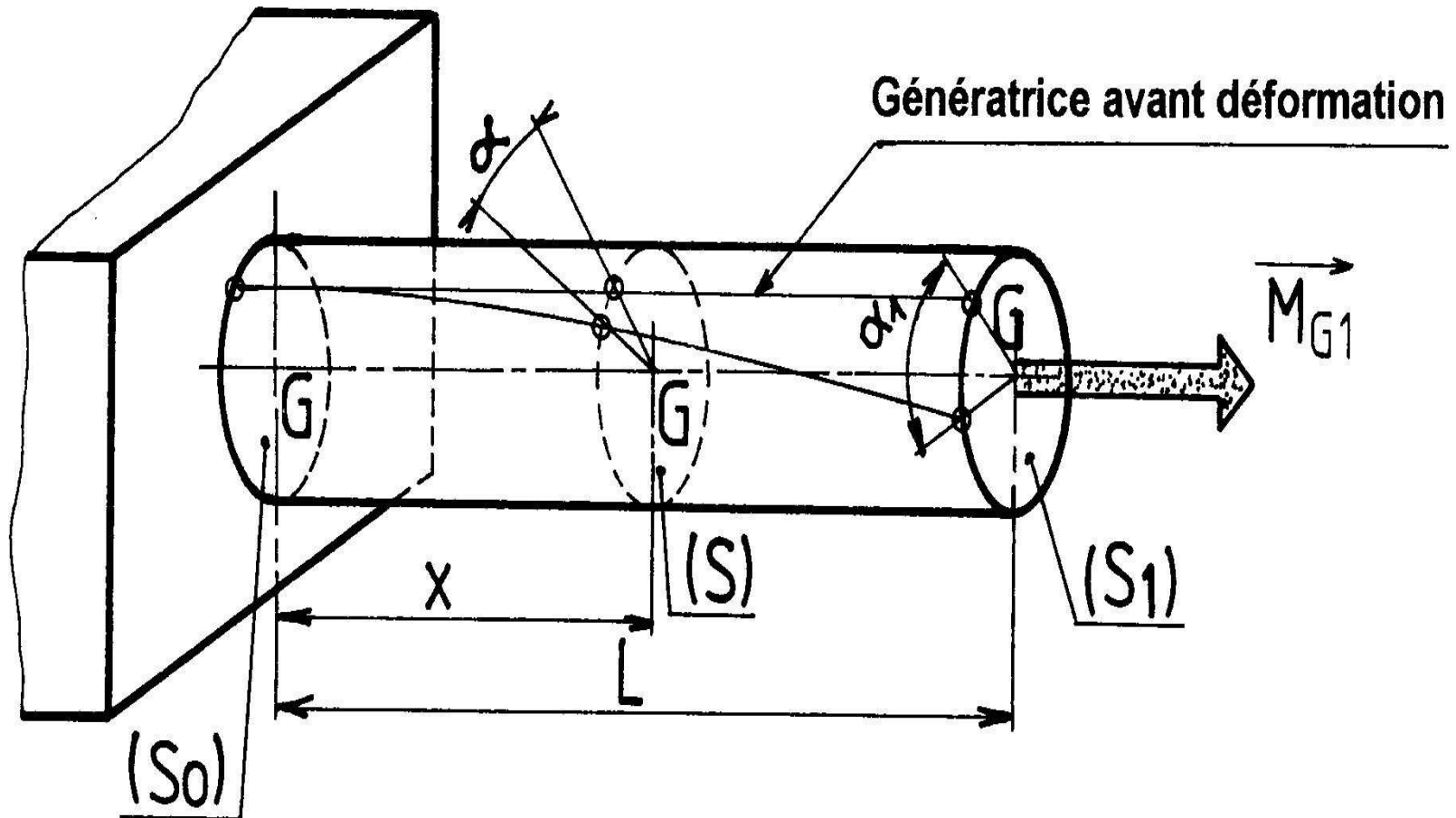
$$\left\{ \begin{array}{ll} N = 0 & \text{effort normal} \\ T = 0 & \text{effort tranchant} \\ M_t = C \neq 0 & \text{moment de torsion} \\ M = 0 & \text{moment fléchissant} \end{array} \right.$$

- Répartition des contraintes dans une section transversale de normale ex



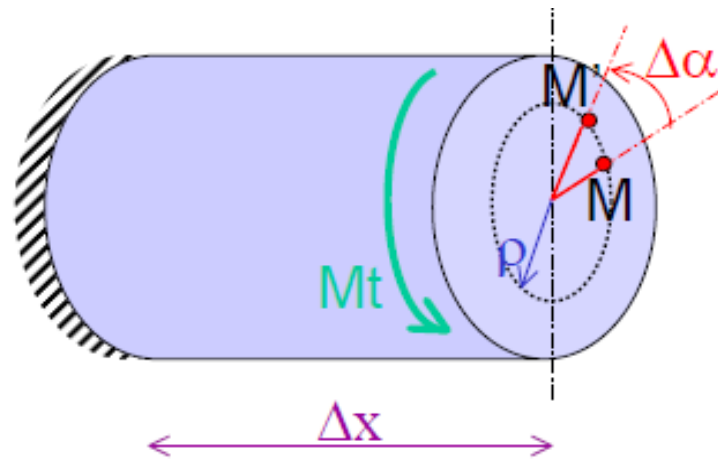
La torsion génère une contrainte purement tangentielle, proportionnelle à r

Essai de torsion



$$\theta = \alpha x$$

Hypothèse :
section
circulaire



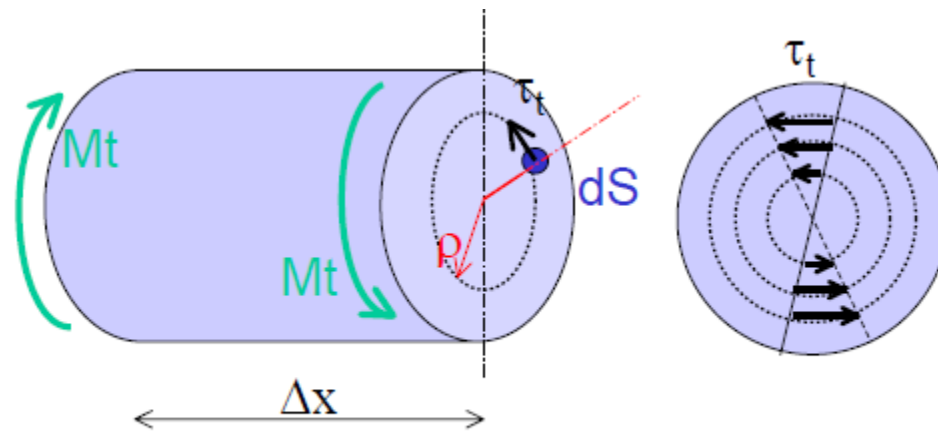
α angle
 Δx distance
 ρ distance à l'axe
de torsion

glissement relatif : $\gamma_t = \frac{MM'}{\Delta x} = \rho \frac{\Delta \alpha}{\Delta x}$

déformation due à la torsion: $\theta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \frac{d\alpha}{dx}$

$\gamma_t = \rho \theta$

$\tau_t = G \gamma_t = G \rho \theta$



$$\begin{aligned}
 Mt &= \iint \tau_t dS \rho \\
 &= \iint G \rho^2 \theta dS \\
 &= G \theta \iint \rho^2 dS
 \end{aligned}$$

On pose : $J = \iint \rho^2 dS$ constante de torsion

$$Mt = G J \theta$$

$$\tau_t = G \rho \theta$$

donc

$$\tau_t = \rho \frac{Mt}{J}$$

NB : τ_t est une contrainte tangentielle

Dimensionnement des arbres circulaires soumis à la torsion

• La sécurité d'exploitation impose deux conditions :

► Une condition de résistance

$$\tau_{max} \leq R_{pg}$$

Avec :

$$R_{pg} = \tau_u = \frac{\tau_e}{s}$$

$$\frac{C}{I_0} R \leq R_{pg}$$



$$\frac{I_0}{R} \geq \frac{C}{R_{pg}}$$

► Une condition de rigidité

$$\alpha = \frac{C}{\mu I_0} \leq \alpha_{max}$$



$$I_0 \geq \frac{C}{\mu \alpha_{max}}$$

En pratique

$$\alpha_{max} \approx 0.25 \text{ deg/m}$$

Dans les zones discontinuités géométriques on doit tenir compte d'un phénomène de concentration de contraintes

APPLICATION

Un arbre cylindrique de diamètre d_1 transmet un couple de moment $M_t = 150 \text{ Nm}$. Ce type de construction exige une grande rigidité. On limite la déformation unitaire à $0,25 \text{ degré/m}$. Une rainure provoque une concentration de contrainte de valeur $k = 3$. On choisit pour le matériau un acier A33 pour lequel, $\tau_e = 150 \text{ MPa}$ et $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ avec un coefficient de sécurité de $2,5$. Déterminer le diamètre minimal de cet arbre. (En résistance).

- Déterminer la contrainte tangentielle maximale et tracer la répartition de cette contrainte tangentielle sur une section circulaire.*
- Pour alléger la construction, on se propose de remplacer cet arbre plein par un arbre creux de diamètres (D, d) de même résistance et de poids moitié. Calculer cet arbre creux.*
- Vérifier la rigidité de cet arbre creux.*

Condition de résistance et condition de rigidité

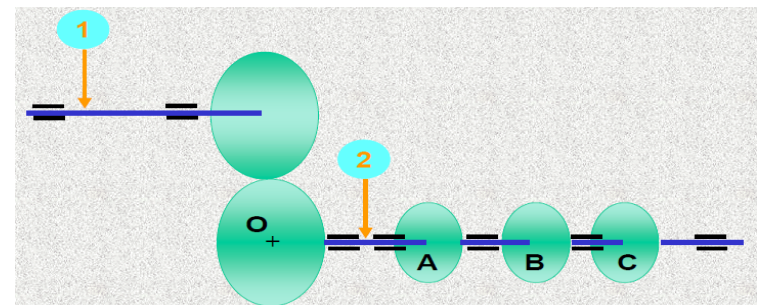
On considère un arbre dont la forme est cylindrique entre les sections A et B. Un calcul Préliminaire a permis de déterminer le moment de torsion entre les sections A et B, à savoir : $M_t = 50 \text{ Nm}$. Cet arbre est en acier pour lequel $G = 8.104 \text{ MPa}$ et $\tau_e = 180 \text{ MPa}$. On adopte un coefficient de sécurité de 3. Si de plus, on s'impose une valeur limite pour l'angle unitaire de torsion $\theta_{\text{limite}} = 0.25 \text{ }^\circ/\text{m}$. On demande de déterminer le diamètre de cet arbre dans les deux cas. Conclure



Exercice 2: Dimensionnement d'un arbre étagé

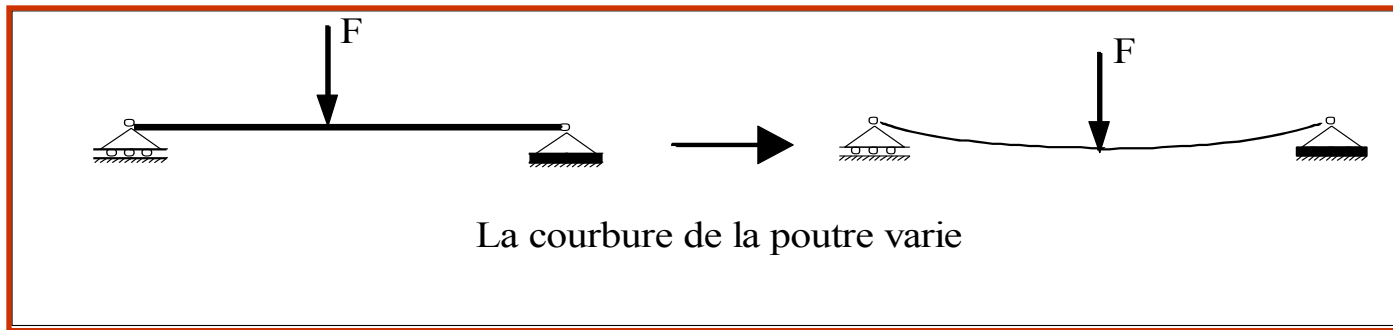
On se propose d'étudier le système présenté sur la figure 9. L'arbre 1 schématise l'arbre de sortie d'un réducteur de vitesse. Il est entraîné par un arbre moteur 2 à l'aide d'un engrenage. Il transmet le mouvement à un mécanisme à l'aide de trois courroies. On supposera que chaque courroie est équivalente et transmet le tiers du moment total. On négligera les phénomènes de concentration de contraintes. On ne considèrera que les contraintes dues à la torsion, en ne tenant pas compte de la flexion.

Calculer le diamètre minimal de l'arbre en chaque point, pour que la contrainte de cisaillement maximale reste inférieure à $R_{pg} = 50 \text{ MPa}$ avec $C = 100 \text{ N.m}$ (au niveau de l'engrenage)



Flexion des poutres droites

☛ Une poutre est soumise à la flexion lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa courbure.

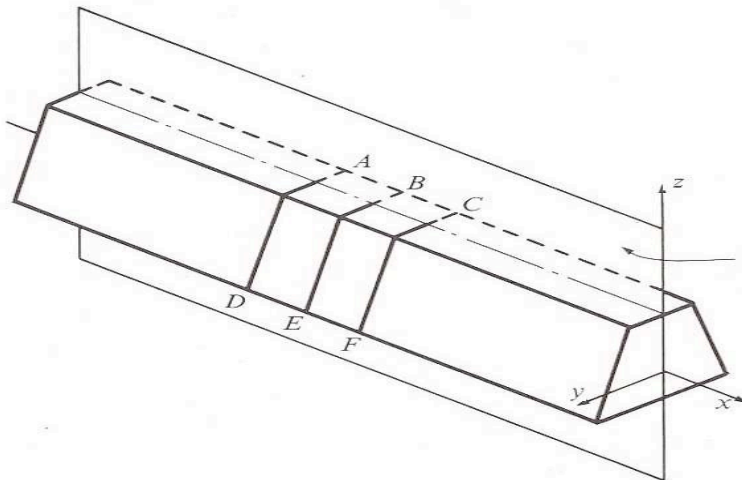


☛ Hypothèses :

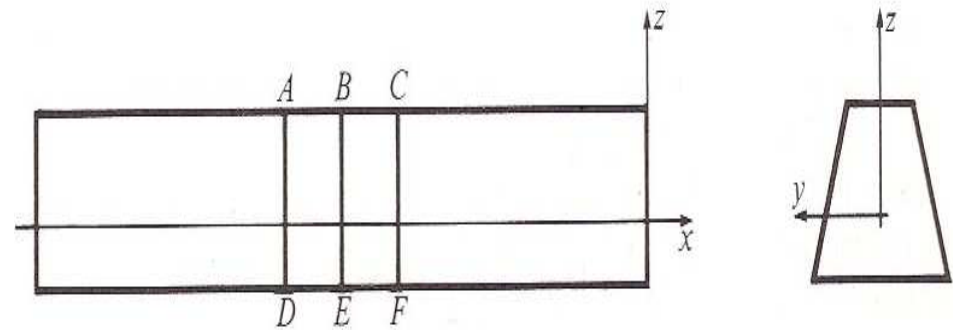
- a) Toute fibre contenue dans un plan de symétrie demeure dans ce plan pendant la déformation.
- b) Hypothèse de Navier-Bernoulli : Les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.
- d) le moment de flexion M_f ne comporte qu'une composante $M_{fz} = M$ perpendiculaire au plan G_{xy} appelé plan de flexion;

Flexion des poutres droites

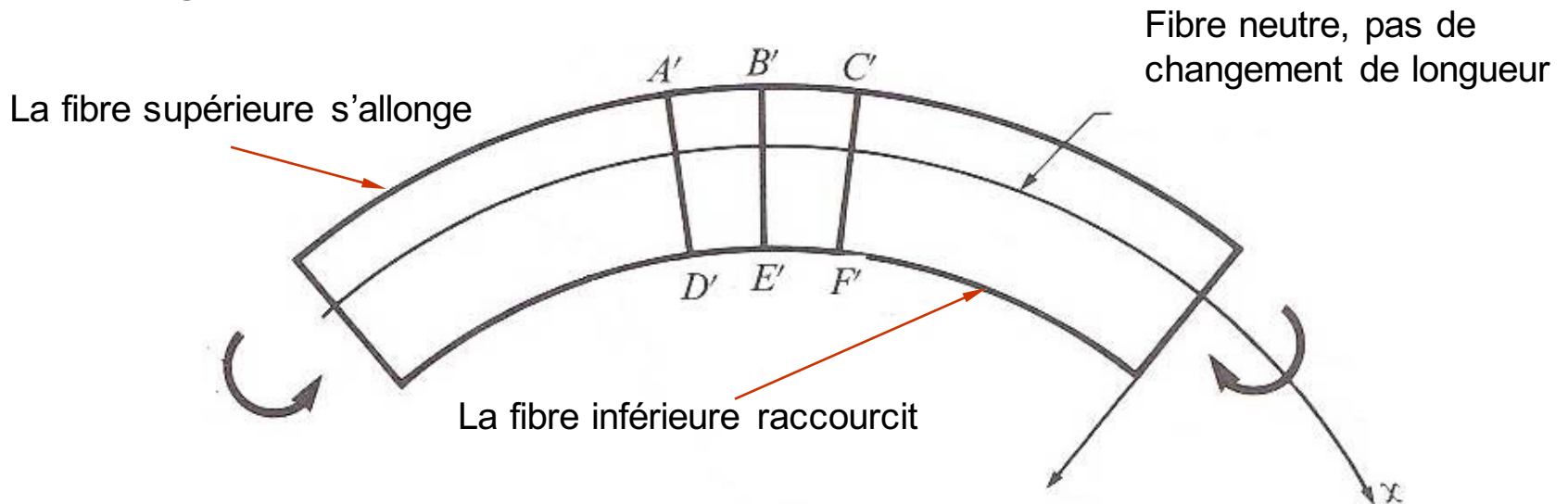
☛ Configuration avant déformation



☛ Plan de flexion x-z

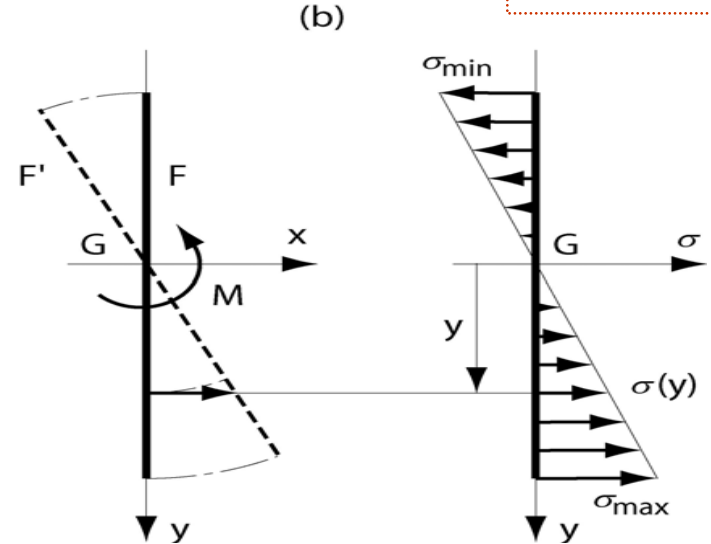
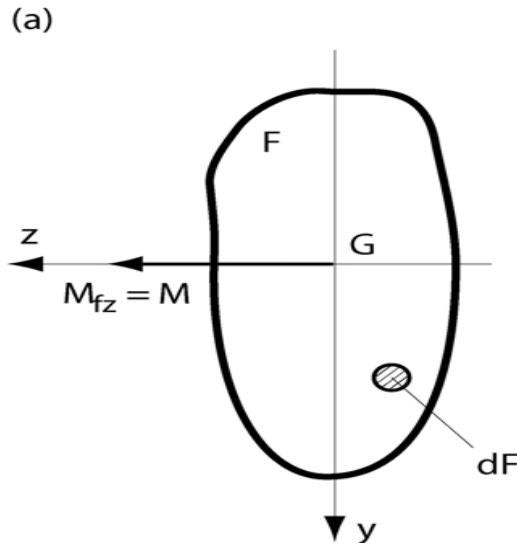
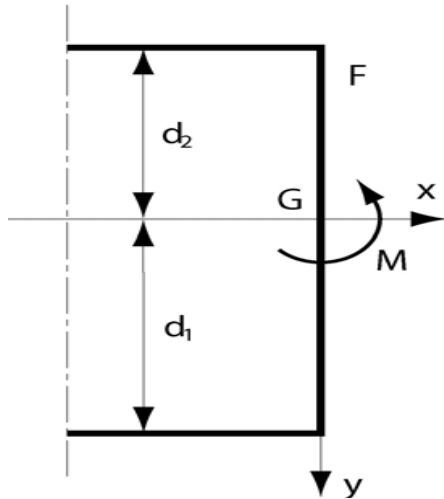


☛ Configuration après déformation



Flexion des poutres droites

$$\sigma = ky$$



$$0 = \iint_F \sigma dF$$

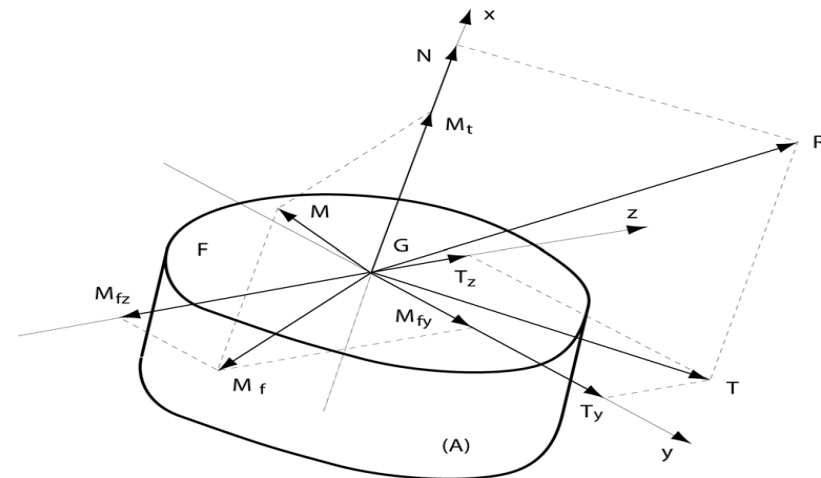
$$0 = \iint_F \tau_y dF$$

$$0 = \iint_F \tau_z dF$$

$$0 = -\iint_F (\tau_z y - \tau_y z) dF$$

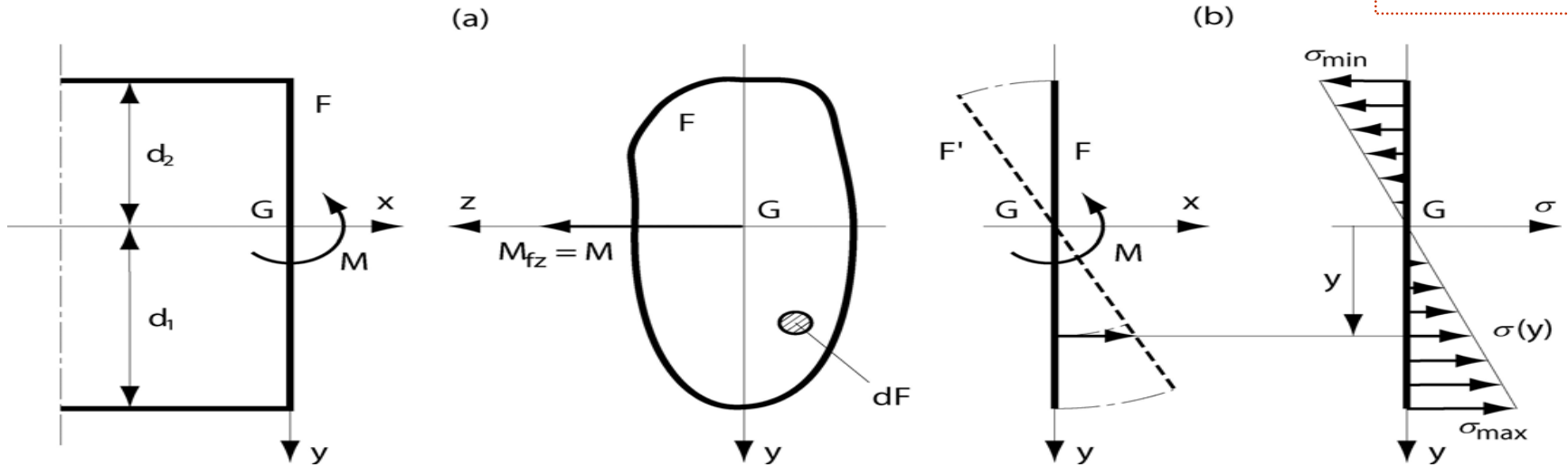
$$0 = -\iint_F \sigma z dF$$

$$M = \iint_F \sigma y dF$$



Flexion des poutres droites

$$\sigma = ky$$



$$M = \iint_F \sigma y dF = k \iint_F y^2 dF$$

$$I_z = I = \iint_F y^2 dF$$

$$\sigma = ky$$

$$\sigma = \frac{yM}{I}$$

$$y = d_1 \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{d_1 M}{I} \rightarrow I = W_1 d_1 \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M}{W_1}$$

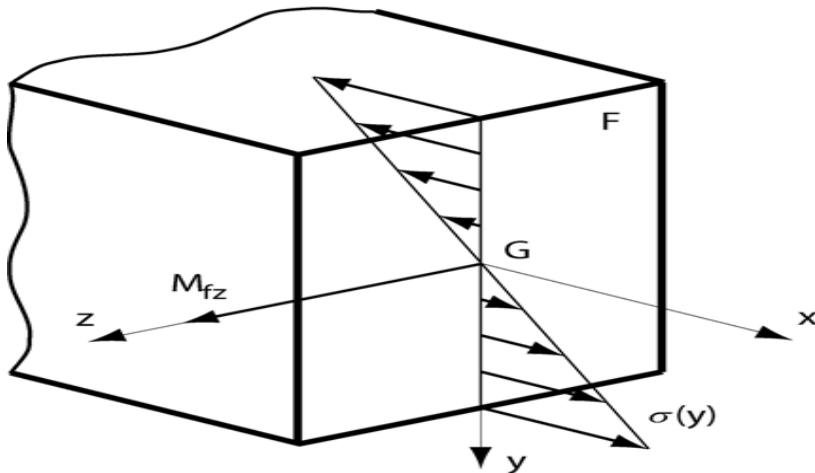
$$y = d_2 \rightarrow \sigma_{\min} = -\frac{d_2 M}{I} \rightarrow I = W_2 d_2 \rightarrow \sigma_{\min} = -\frac{M}{W_2}$$

Flexion des poutres droites

Convention de signe en flexion

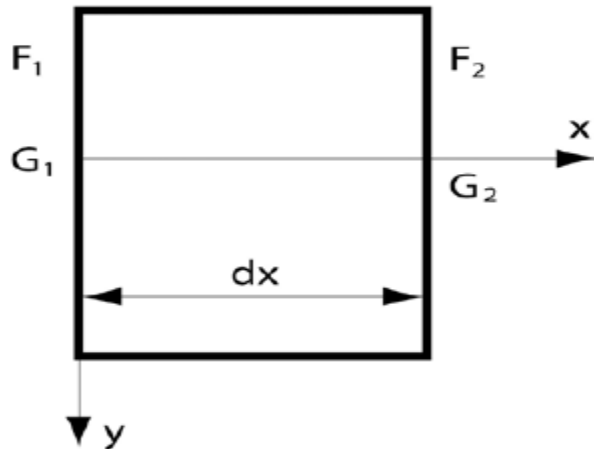
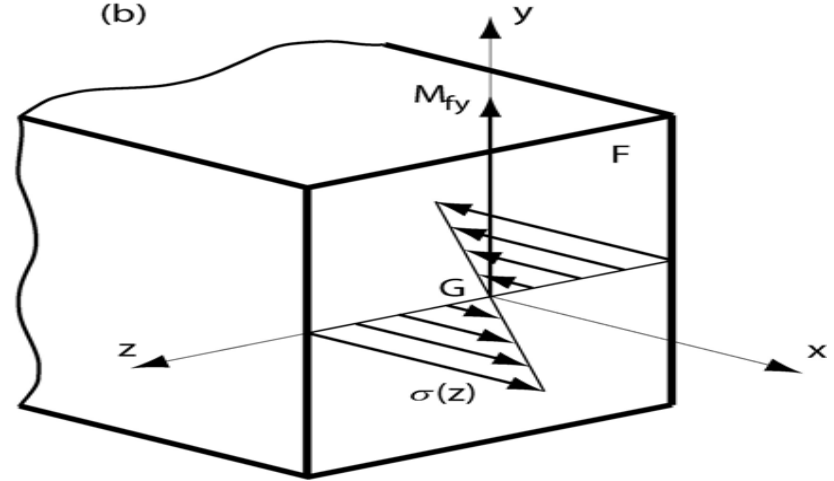
Moment de flexion M_{fz}

(a)



Moment de flexion M_{fy}

(b)

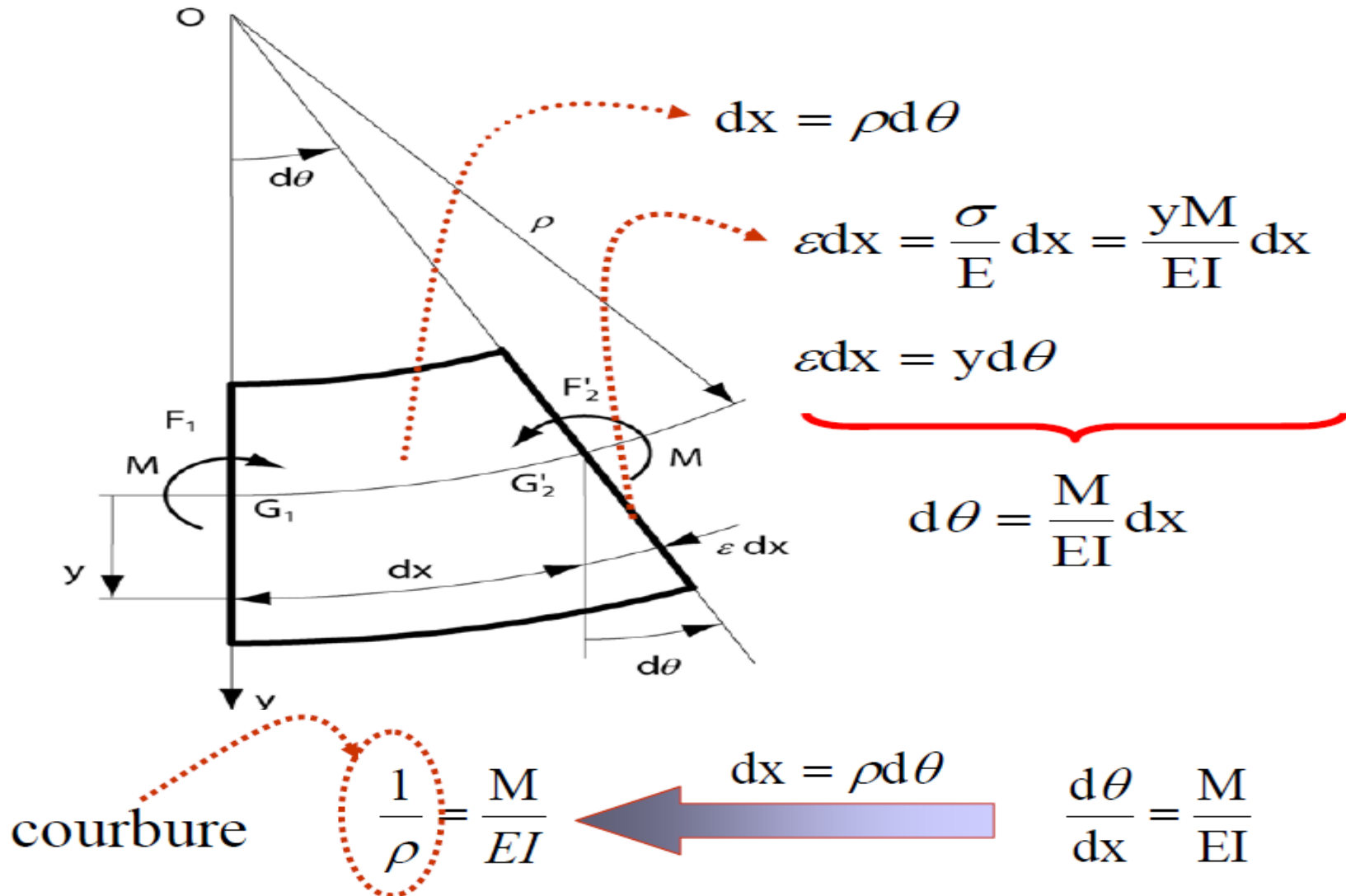


on connaît

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \sigma = \frac{yM}{I}$$

Flexion des poutres droites

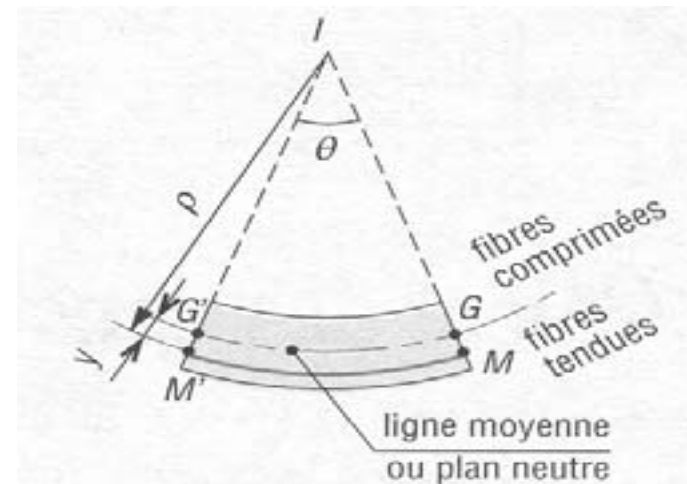
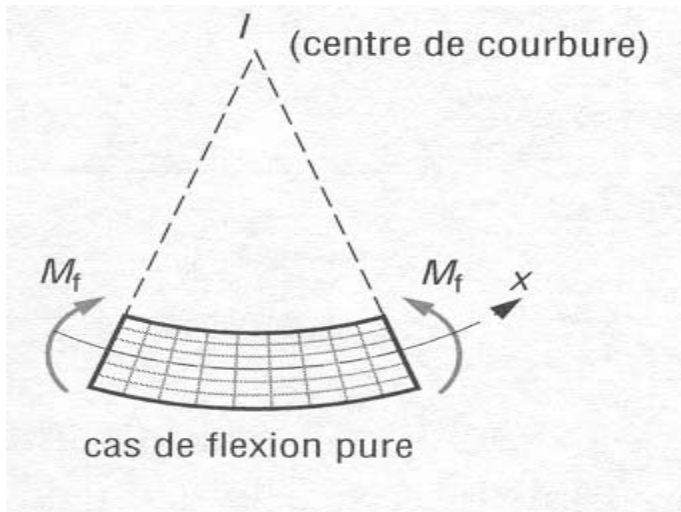
Convention de signe en flexion



Flexion des poutres droites

Etude de la déformée.

Sous l'application de charges, la ligne moyenne d'une poutre se déforme. On se propose de déterminer l'équation $y(x)$ de cette déformée en fonction de x .



En géométrie analytique,

$$\rho = \frac{dx}{d\theta} = \frac{(1 + y'^2(x))^{\frac{3}{2}}}{y''(x)}$$

Comme le terme $y'^2(x)$ est négligeable devant 1, on peut écrire

$$\rho = \frac{1}{y''(x)}$$

On peut donc écrire :

$$y''(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

Or,

$$d\theta = \frac{M_z}{E \cdot I_{Gz}} dx \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_z}{E \cdot I_{Gz}}}$$

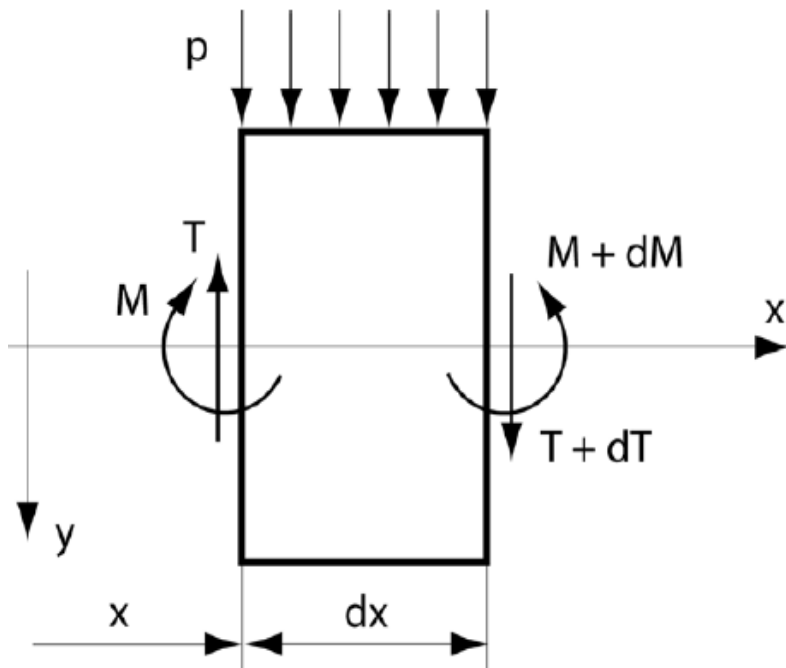
Donc :

$$\boxed{y'' = \frac{M_z}{E \cdot I_{Gz}}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{EI_{Gz} y'' = EI_{Gz} \frac{d\theta}{dx} = M_z}$$

Cette expression qui donne la dérivée seconde de la déformée en fonction du moment fléchissant est **appelée loi moment-courbure ou formule de la double intégration**. En effet, cette équation permet de déterminer l'équation de la déformée $y(x)$ en intégrant deux fois l'équation du moment $M^z(x)$ (et en utilisant les conditions aux limites).

Flexion des poutres droites

le moment de flexion varie le long de la poutre, il s'accompagne d'un effort tranchant



équilibre

$$-T + p dx + (T + dT) = 0$$

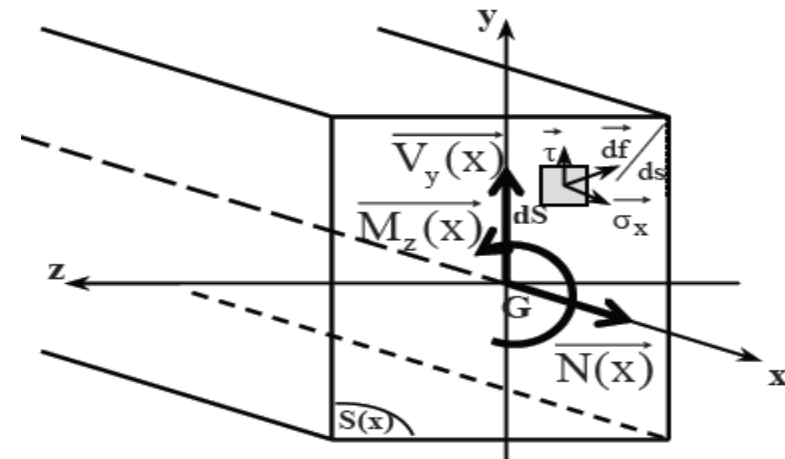
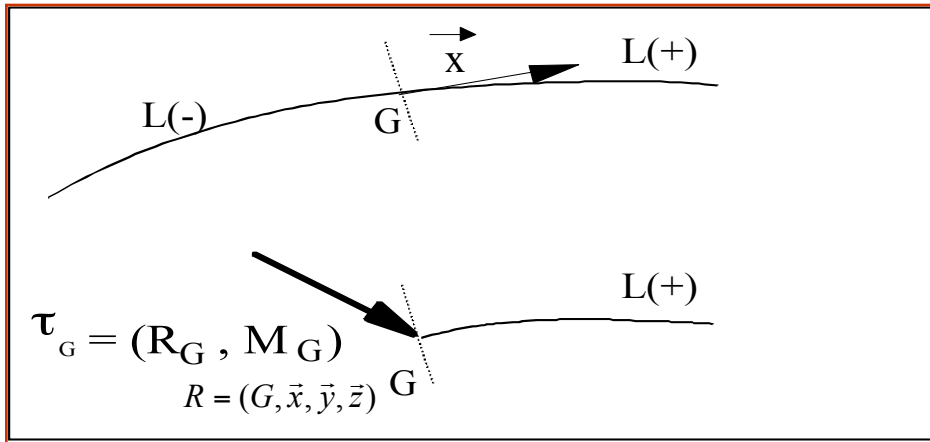
$$-M - T dx + p dx \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0$$

$$p = -\frac{dT}{dx}$$

$$T = \frac{dM}{dx}$$

Flexion des poutres droites

➤ Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissant



L'action des forces de cohésion sur la section se réduit en G au torseur :

$$\{T_{coh}\} = \{E_2 \rightarrow E_1\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ M_G \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_f z \end{matrix} \right\}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

les éléments de réduction des forces élémentaires df qui s'exercent sur chacune des facettes dS :

$$T_y(x) = V_y(x)$$

$$V_y(x) = \iint_S \tau \cdot dS$$

$$M_z(x) = \iint_S -y \cdot \sigma_x \cdot dS$$

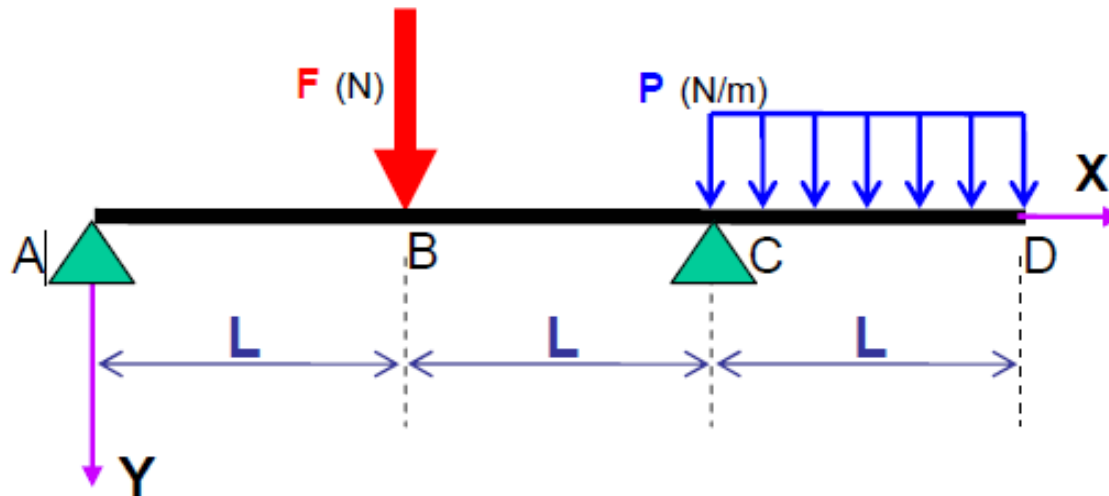
Flexion des poutres droites

Diagrammes des sollicitations.

La finalité de la théorie des poutres est de connaître le comportement des particules dans toute section d'une poutre.

La première étape consiste à exprimer les sollicitations dans une section $S(x)$ quelconque de la poutre en fonction :

- des actions extérieures (connues),
- des actions de liaisons (calculées en appliquant le PFS à la poutre entière).



Connaissant les sollicitations dans une section quelconque $S(x)$, il suffit alors de faire varier x le long de la poutre pour connaître les sollicitations dans toutes les sections. On obtient alors les diagrammes des sollicitations N , V et M en fonction de x .

Moment d'inertie de surface

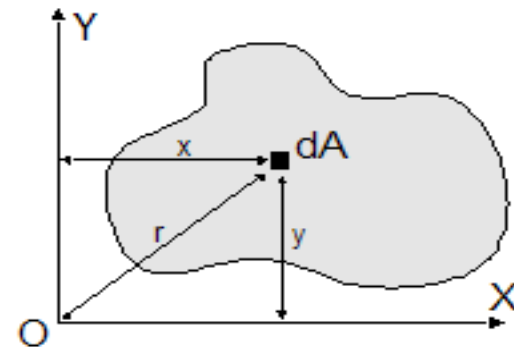
- Surface simple

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

$I_{xy} = 0$ et $I_{x_G y_G} = 0$ pour une surface ayant 1 axe de symétrie

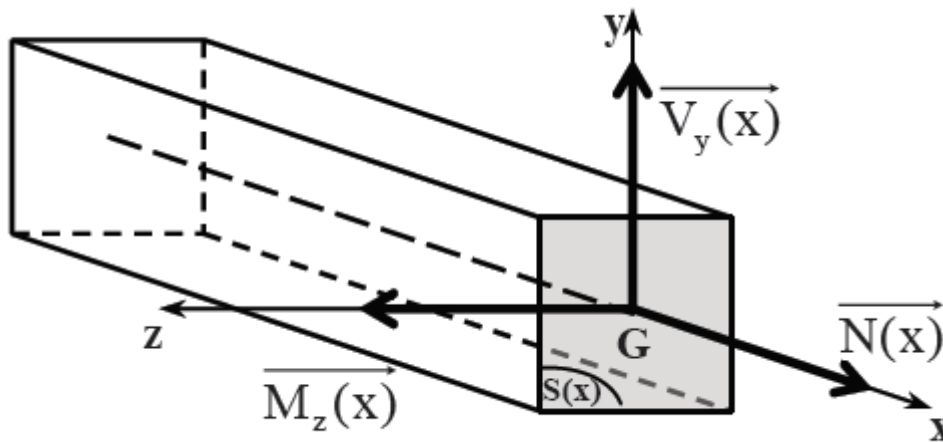


Flexion composée

1 - Traction ou compression + flexion

SOLLICITATION ETUDIEE : **Contraintes normales**

On considérera qu'une poutre est soumise à de la flexion composée lorsque les éléments de réduction du torseur des efforts internes de cohésion se réduisent à :



$$N(x) \neq 0 \quad T(x) = 0$$

$$V_y(x) \neq 0 \quad M_y(x) = 0$$

$$V_z(x) = 0 \quad M_z(x) \neq 0$$

$$\{\tau(2/1)\}_G = \begin{Bmatrix} N(x) & 0 \\ V_y(x) & 0 \\ 0 & M_z(x) \end{Bmatrix}$$

Torseur des efforts internes de cohésion :

⇒ On fait abstraction de V pour le calcul des contraintes normales.

Flexion composée

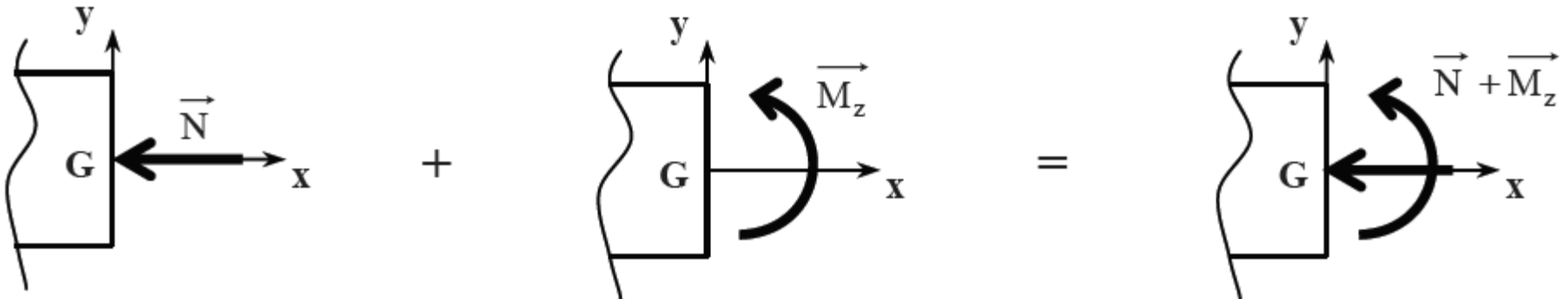
► CONTRAINTES NORMALES : **Expression de la contrainte normale σ^x**

► L'effort normal N crée des contraintes normales uniformes qui sont des compressions ou des tractions selon le sens de N .

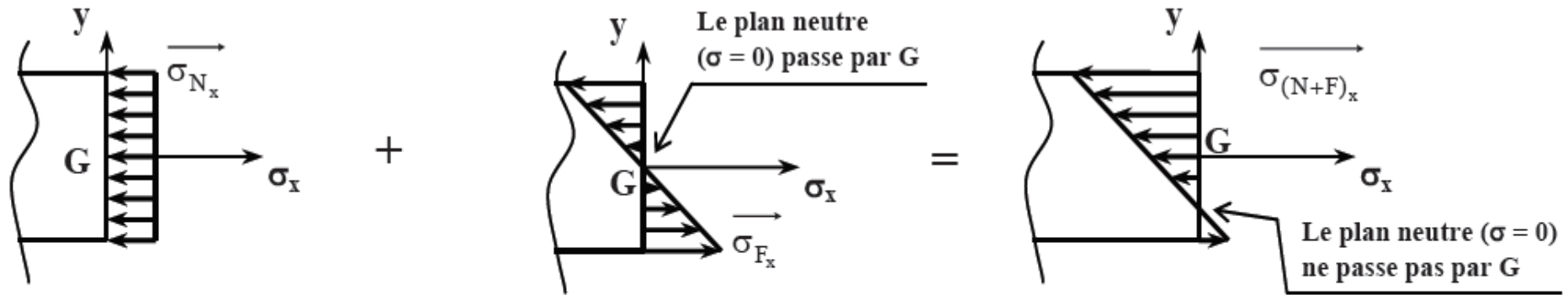
$$\sigma_{N_x} = \frac{N}{S}$$

► Le moment de flexion M_z crée des contraintes normales qui sont des compressions et des tractions en fonction de y .

$$\sigma_{F_x} = -\frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y$$



Flexion composée



$$\sigma_{N_x} = \frac{N}{S} \quad + \quad \sigma_{F_x} = -\frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y \quad = \quad \sigma_{(N+F)_x} = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y$$

En appliquant le principe de superposition, on obtient en un point de cote y :

$$\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y$$

Flexion composée

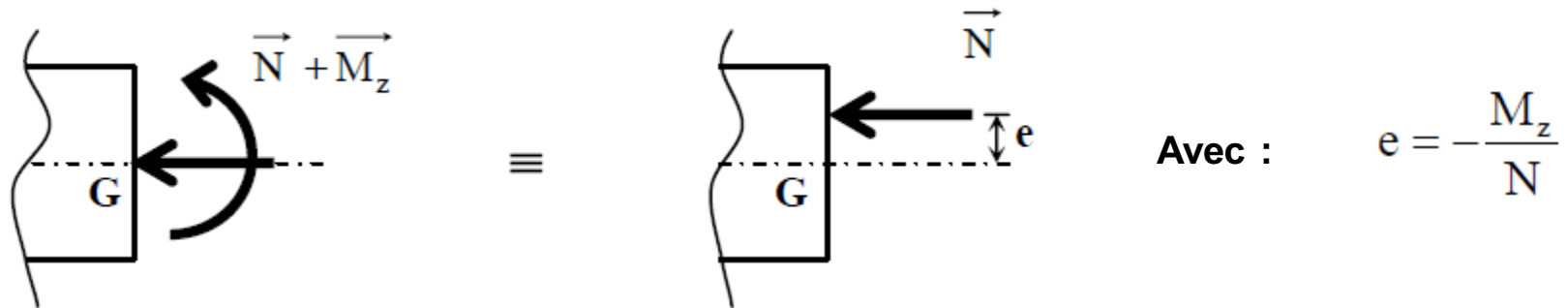
Position du plan neutre

Le plan neutre est défini par $\sigma^x = 0 \Rightarrow \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{N \cdot I_{Gz}}{S \cdot M_z}$

► La position du plan neutre est fonction des charges appliquées.

Force excentrée équivalente

L'ensemble N+M peut être remplacé par une force équivalente N d'excentricité e et dont le moment vaut $M^z = -N \cdot e$



La contrainte normale peut alors s'écrire :

$$\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{N \cdot e}{I_{Gz}} \cdot y = \frac{N}{S} \left(1 - e \cdot y \cdot \frac{S}{I_{Gz}} \right)$$

Flexion composée

Diagramme de représentation de σ^x : les différents cas rencontrés :

$$|\sigma_{F_x}| < |\sigma_{N_x}| :$$

la contrainte normale maximum de flexion, est inférieure à la contrainte normale due à N, en valeur absolue, la section est entièrement comprimée ou entièrement tendue.

Dans tous les cas, le plan neutre ($\sigma^x = 0$) est en dehors de la section

$$|\sigma_{F_x}| = |\sigma_{N_x}| : \quad \text{le plan neutre est situé à l'ordonnée} \quad y_1 = \pm \frac{h}{2}$$

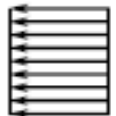









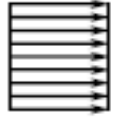




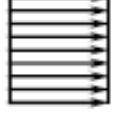



$$|\sigma_{F_x}| > |\sigma_{N_x}| :$$

la contrainte normale maximum de flexion, est supérieure à la contrainte normale due à N, en valeur absolue, le plan neutre est situé dans la section qui est donc divisée en 2 zones, l'une comprimée et l'autre tendue.

Ordonnée du plan neutre :

$$y_1 = \frac{N \cdot I_{Gz}}{S \cdot M_z}$$

Flexion composée

DIAGRAMMES DE REPARTITION DES CONTRAINTES NORMALES				
dues à N	dues à M_x	dues à N et M_x		
		Cas où $ \sigma_{Fx} < \sigma_{Nx} $	Cas où $ \sigma_{Fx} = \sigma_{Nx} $	Cas où $ \sigma_{Fx} > \sigma_{Nx} $
 <p>$N < 0$</p>	 <p>$M > 0$</p>	 <p>Section entièrement comprimée</p>	 <p>$y_1 = -\frac{h}{2}$</p>	
 <p>$N < 0$</p>	 <p>$M < 0$</p>	 <p>Section entièrement comprimée</p>	 <p>$y_1 = +\frac{h}{2}$</p>	
 <p>$N > 0$</p>	 <p>$M > 0$</p>	 <p>Section entièrement tendue</p>	 <p>$y_1 = +\frac{h}{2}$</p>	
 <p>$N > 0$</p>	 <p>$M < 0$</p>	 <p>Section entièrement tendue</p>	 <p>$y_1 = -\frac{h}{2}$</p>	