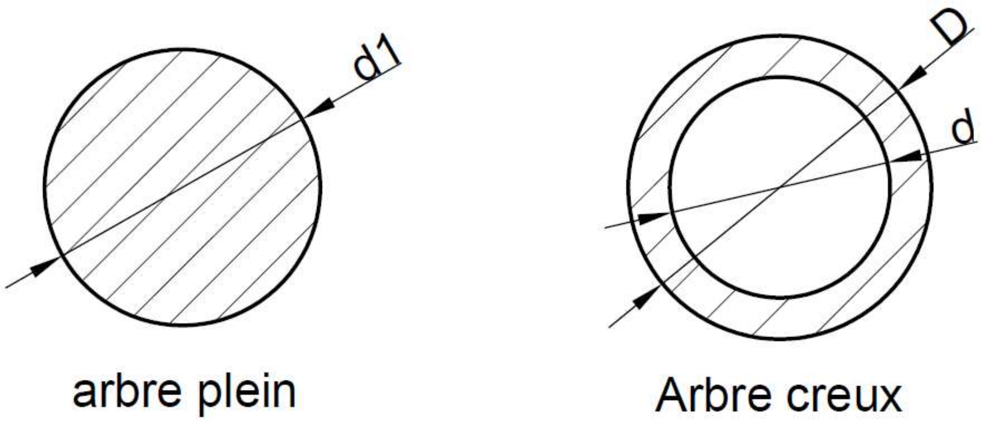
Exercice 1 (Torsion simple)

Soit deux arbres de transmission construit à partir d'un même acier (G = 8.104 MPa), le premier est plein de diamètre d1, et le seconde est creux (D : diamètre extérieur, d : diamètre intérieur).



Le couple à transmettre est de 200 N.m et $\tau_p = 100\,MPa$

Questions :

1/ Calculer d1.

2/ Calculer D et d.

3/ Déterminer le rapport de poids entre ces deux arbres.

Solution

1/ Calculons d1 :

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} = \tau_p$$

$$\frac{Mt}{\left(I_0/v\right)} \leq \tau_p \quad avec: I_0 = \frac{\pi d_1^4}{32} \quad et \quad v = \frac{d_1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{Mt}{\left(\dfrac{\pi d_1^4}{32} \Big/ \dfrac{d_1}{2}\right)} \leq \tau_p$$

$$\Rightarrow d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16Mt}{\pi \tau_p}} \quad \Rightarrow d_1 \approx 21{,}67\,mm$$

2/ calcul de D :

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} = \tau_p$$

$$\frac{Mt}{\left(I_0/v\right)} \leq \tau_p \quad avec: I_0 = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-0{,}8^4\right) \quad et \quad v = \frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{Mt}{\left(\frac{\pi D^4}{32}\left(1-0{,}8^4\right) \Big/ \frac{D}{2}\right)} \leq \tau_p$$

$$\Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16Mt}{\pi\left(1-0{,}8^4\right)\tau_p}} \qquad \Rightarrow D \approx 25{,}8\ mm$$

Calcul de d :

$$on\ a: d = 0{,}8 \times D \Rightarrow d = 0{,}8 \times 25{,}8 \approx 20{,}64 mm$$

3/ rapport de poids :

$$\lambda = \frac{m_{creux}}{m_{plein}} = \frac{\rho.V_{creux}}{\rho.V_{plein}} = \frac{\rho.l.S_{creux}}{\rho.l.S_{plein}} = \frac{D^2-d^2}{d_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 0{,}51 = 51\%$$

Exercice 2 : (Condition de résistance et condition de rigidité)

On considère un autre arbre cylindrique soumis à une sollicitation de torsion $Mt = 50\ N.m$, cet arbre est en acier avec :

$$\left|\begin{array}{l} G = 8\times10^4\, MPa \\ \tau_e = 200 MPa \\ s = 2{,}5 \end{array}\right.$$

On impose une valeur limite de θ :

$$\theta_l = 0{,}25° / m$$

Questions :

Déterminer le diamètre dans les 2 cas :

- Cas 1 : en résistance
- Cas 2 : en rigidité

Solution

Cas 1 : en résistance

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_t}{\left(I_0 / v\right)} \leq \frac{\tau_e}{s} \quad \Leftrightarrow \quad I_0 / v \geq \frac{M_t . s}{\tau_e}$$

$$avec : I_0 = \frac{\pi d^4}{32} \quad et \quad v = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_0}{v} = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$\Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t . s}{\pi \tau_e}} \quad \Rightarrow d \approx 14{,}71\, mm$$

Cas 1 : en rigidité

$$\theta \leq \theta_{Limite}$$

$$on\ sait\ que: \quad M_t = G\theta I_0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{M_t}{G I_0}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{32 M_t}{G \pi d^4} \quad \Rightarrow \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_t}{G \pi \theta_{Limite}}}$$

$$\Rightarrow d \approx \sqrt[4]{\frac{32 \times 50 \times 1000 \times 1000 \times 180}{8 \times 10000 \times \pi \times 0{,}25 \times \pi}} \approx 34{,}76\, mm$$

Exercice 3 : (Concentration de contraintes)

Un arbre cannelé de boite à vitesse doit transmettre une puissance de 125,6 kW à la vitesse 3000 tr/min, cet arbre est en acier pour le quel $\tau_e = 2100\,MPa$ et le module d'élasticité transversal 8.10^4MPa. Les cannelures provoque une concentration de contrainte $K_t = 1,57$, on adopte pour cette construction in coefficient de sécurité s = 3.

1/ on envisage deux solutions : un arbre plein d1, et un arbre creux avec d=(2/3)D.

a) Déterminer le moment de torsion.
b) Déterminer le diamètre plein.
c) Déterminer la déformation angulaire α_1 de l'arbre plein entre deux sections droite de distance = 140 mm

2/ l'arbre creux :

a) Déterminer le diamètre extérieur D de l'arbre creux.
b) Déterminer la déformation angulaire α_2 de l'arbre creux entre 2 sections droite distance = 140 mm

3 / quel est l'arbre le plus rigide ?

4/ déterminer le rapport de masse.

5/ conclure.

Solution

1/ a/ le moment de torsion :

$$P = C.\omega = C.\frac{2\pi N}{60}$$

$$\Rightarrow C = \frac{60P}{2\pi N}$$

$$\Rightarrow C = M_t = 4\times 10^5\, N.mm$$

b/ le diamètre de l'arbre plein :

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} = \frac{\tau_e}{K_t.s}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_t}{\left(I_0/v\right)} \leq \frac{\tau_e}{K_t.s} \quad \Leftrightarrow \quad I_0/v \geq \frac{M_t.K_t.s}{\tau_e}$$

$$avec: I_0 = \frac{\pi d_1^4}{32} \quad et \quad v = \frac{d_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_0}{v} = \frac{\pi d_1^3}{16}$$

$$\Rightarrow d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t.K_t.s}{\pi \tau_e}} \quad \Rightarrow d_{1\min} \approx 20\, mm$$

c/ calcul de la déformation angulaire :

$$\theta = \frac{\alpha_1}{l} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \theta.l$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{M_t}{GI_0}.l$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{4\times 10^5 \times 140 \times 32}{8\times 10^4 \times \pi \times 20^4} \approx 0{,}044\, rad$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 2{,}52\, \text{degré}$$

2/

a/

$$\tau_{\max} \le \tau_{adm} = \frac{\tau_e}{K_t.s}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_t}{\left(I_0/v\right)} \le \frac{\tau_e}{K_t.s} \quad \Leftrightarrow \quad I_0/v \ge \frac{M_t.K_t.s}{\tau_e}$$

$$avec: I_0 = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^4\right) \quad et \quad v = \frac{D}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_0}{v} = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)$$

$$\Rightarrow D \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_t.K_t.s}{\pi\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)\tau_e}} \quad \Rightarrow D_{\min} \approx 21{,}51\, mm$$

Calculons d :

$$d = \frac{2}{3}D = \frac{2}{3} \times 21{,}51 \approx 14{,}34\ mm$$

b/ calcul de la déformation angulaire :

$$\theta = \frac{\alpha_2}{l} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \theta.l$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{M_t}{GI_0}.l$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{4\times10^5 \times 140 \times 32}{8\times10^4 \times \pi \times (21{,}51)^4 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)} \approx 0{,}041\, rad$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \approx 2{,}32\ \deg ré$$

3/ d’après ces résultats, l’arbre creux est plus rigide que l’arbre plein.

4/ Rapport de masse :

$$\lambda = \frac{m_{creux}}{m_{plein}} = \frac{\rho.V_{creux}}{\rho.V_{plein}} = \frac{\rho.l.S_{creux}}{\rho.l.S_{plein}} = \frac{D^2 - d^2}{d_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 0{,}64 = 64\%$$

Conclusion :

L’arbre creux a une masse qui représente 64% de la masse de l’arbre plein avec une rigidité supérieure.