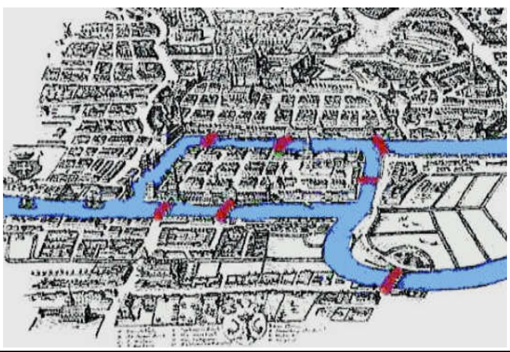
GRAPHES ET ALGORITHMES

GRAPHES ET ALGORITHMES

- Historique :
  - La théorie des graphes (1736) : le mathématicien allemand L. Euler apporte une réponse au problème que des habitants de la ville de Köenigsberg : comment traverser les sept ponts de cette ville sans jamais passer deux fois par le même.

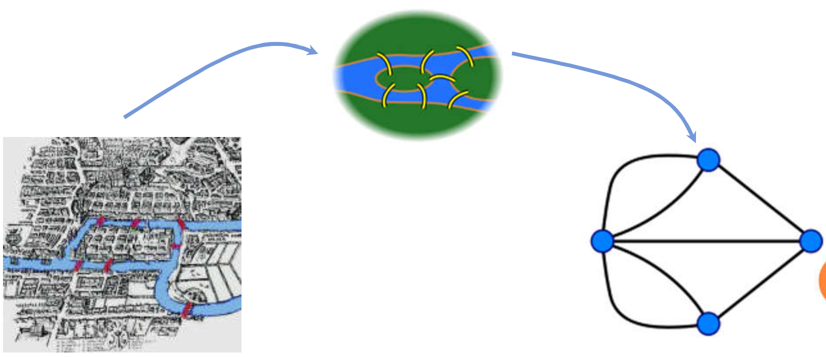


Graphes et algorithmes

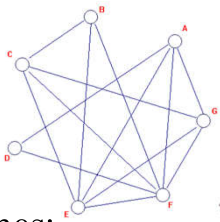
- Historique :
  - Jusqu'en 1946, la théorie des graphes reste du domaine des mathématiques.
  - 1939-45 : Naissance de la Recherche Opérationnelle, provoquant un développement de la théorie des graphes comme modèles de problèmes concrets.
  - Depuis les années 1960 : développement des sciences de l'information et de la communication.

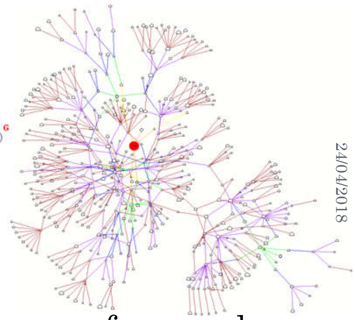
Premier exemple (Les sept ponts de Königsberg)

- Est-il possible de se promener dans la ville de Königsberg de façon à emprunter chaque pont une et une seule fois et se retrouver dans le quartier de départ ?



INTRODUCTION





- Théorie des graphes:
  - Représenter des problèmes sous formes de points et des traits reliant ces points
  - Etablir des théorèmes, des algorithmes définissant les différents types de relations entre ces points et ces traits.
  - En théorie des graphes, les points sont appelés sommets et les traits arêtes.

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Définitions mathématiques :
  - Soit E un ensemble fini. L'ensemble des sous-ensembles de E, également appelé ensemble des parties de E, est noté $P(E)$.

On appelle graphe sur E un couple $G = (E, \Gamma)$ où Γ est une application de $E \rightarrow P(E)$.

Il n'est pas facile de visualiser un graphe donné sous cette forme

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Exemple :

  - Soit un graphe $G = (E, \Gamma)$, avec $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et Γ définie par :
    - $\Gamma(1) = \{1, 2, 4\}$
    - $\Gamma(2) = \{3, 1\}$
    - $\Gamma(3) = \{4\}$
    - $\Gamma(4) = \emptyset$

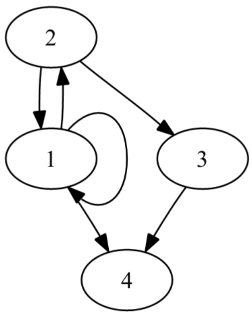
24/04/2018

7

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Exemple :

  - Soit un graphe $G = (E, \Gamma)$, avec $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et Γ définie par :
    - $\Gamma(1) = \{1, 2, 4\}$
    - $\Gamma(2) = \{3, 1\}$
    - $\Gamma(3) = \{4\}$
    - $\Gamma(4) = \emptyset$



24/04/2018

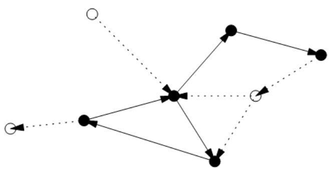
8

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

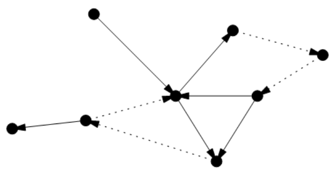
- On note $|E|$ le cardinal (nombre d'éléments) de E.
- Pour un graphe $G=(E,\Gamma)$, on notera habituellement $n=|E|$ et $m=|\Gamma|$.
- Un sous-graphe de $G=(E, \Gamma)$ est un graphe $H = (F, \Gamma_F)$ tel que F est un sous-ensemble de E et Γ_F est l'ensemble des arcs de Γ dont les deux sommets sont dans F.
- On dit que H est le sous-graphe de G induit par F, et que Γ_F est la restriction de Γ à l'ensemble F.

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Un graphe partiel de G est un graphe $G'=(E,\Gamma')$ tel que Γ' est un sous-ensemble de Γ.



Sous graphe



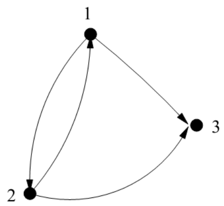
Graphe partiel

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Le symétrique d'un graphe G est le graphe $G^{-1} = (E, \Gamma^{-1})$ défini par :

$$\forall x \in E \ , \ \Gamma^{-1}(x) = \{ \ y \in E \mid x \in \Gamma(y) \}$$

- Il s'agit d'un graphe dont l'orientation des arcs a été inversée par rapport au graphe initial.



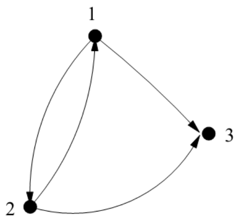
Graphe G

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

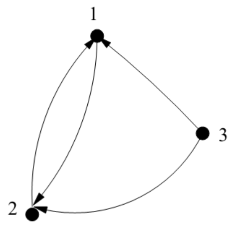
- Le symétrique d'un graphe G est le graphe $G^{-1} = (E, \Gamma^{-1})$ défini par :

$$\forall x \in E \ , \ \Gamma^{-1}(x) = \{ \ y \in E \mid x \in \Gamma(y) \}$$

- Il s'agit d'un graphe dont l'orientation des arcs a été inversée par rapport au graphe initial.



Graphe G

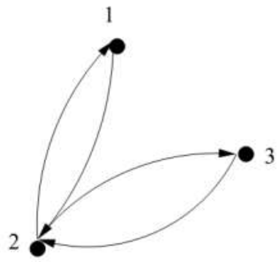


Symétrique de G

Définitions et vocabulaire

- Graphe symétrique :
  - Le graphe G = (E, Γ) est un graphe symétrique si $\Gamma^{-1} = \Gamma$. Autrement dit, G est un graphe symétrique si :

$$\forall x \in E \ , \ \forall y \in E \ , \ x \in \Gamma(y) \Leftrightarrow y \in \Gamma(x)$$

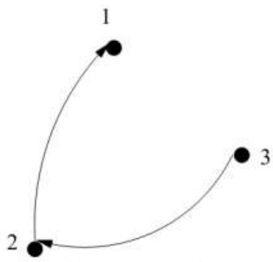


Graphe symétrique

Définitions et vocabulaire

- Graphe antisymétrique :
  - Un graphe G = (E, Γ) est antisymétrique si :

$$\forall x, y \in E \ , \ [x \in \Gamma(y) \text{ et } y \in \Gamma(x)] \Rightarrow y = x$$

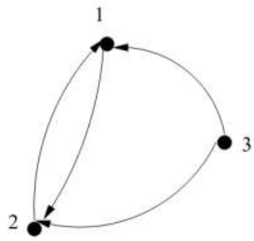


Graphe antisymétrique

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Fermeture symétrique :
  - On appelle fermeture symétrique de G le graphe $G_s = (E, \Gamma_s)$ défini par :

$$\forall x \in E \ , \ \ \Gamma_s(x) = \Gamma(x) \cup \Gamma^{-1}(x)$$

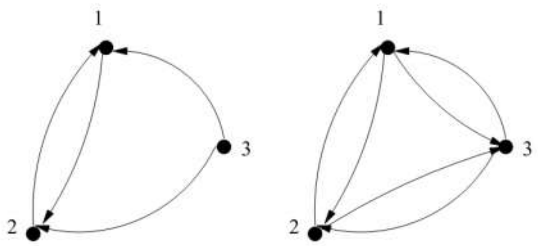


Graphe G

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Fermeture symétrique :
  - On appelle fermeture symétrique de G le graphe $G_s = (E, \Gamma_s)$ défini par :

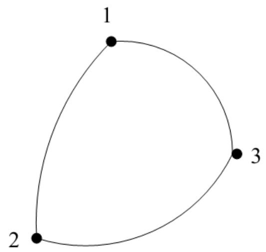
$$\forall x \in E \ , \ \ \Gamma_s(x) = \Gamma(x) \cup \Gamma^{-1}(x)$$



Graphe G   Fermeture symétrique de G

Définitions et vocabulaire

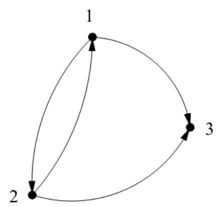
- Graphe non-orienté :
  - On appelle graphe non-orienté sur E un couple $G = (E, \Gamma)$ tel que Γ un sous-ensemble de $\{ \{x, y\} \mid x \in E, y \in E \}$.
  - Tout élément de Γ : {x, y} est appelé arête du graphe.
  - On dit que l'arête {x, y} est adjacente au sommet x et au sommet y.



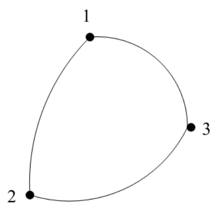
Définitions et vocabulaire

- Graphe non-orienté associé à un graphe orienté :
  - On peut associer à un graphe orienté donné (E, Γ) sa version non-orientée (E, Γ) définie par :

$$\{x, y\} \in \overline{\Gamma} \Leftrightarrow (x, y) \in \vec{\Gamma} \; ou \; (y, x) \in \vec{\Gamma}$$



Graphe G

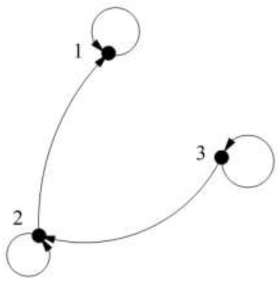


Graphe non orienté associé à G

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Réflexivité :
  - Un graphe $G = (E, \Gamma)$ est réflexif si :

$$\forall x \in E \ , \ x \in \Gamma(x).$$

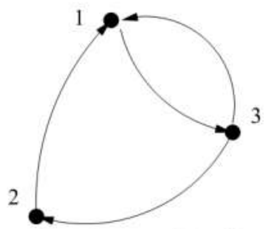


Graphe réfléxif

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Antiréflexivité :
  - Un graphe $G = (E, \Gamma)$ est antiréflexif si :

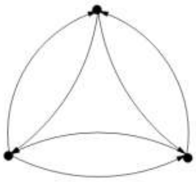
$$\forall x \in E \ , \ x \notin \Gamma(x).$$



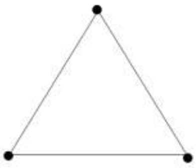
Graphe antiréflexif
(sans boucle)

Définitions et vocabulaire

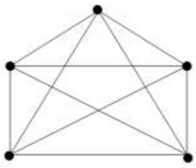
- Graphe complet :
  - Un graphe $G = (E,\Gamma)$ est dit complet si pour tout couple de sommets (x, y) distincts, on a $(x, y) \in \Gamma$.
  - Un graphe complet est aussi appelé clique à n sommets.



Graphe complet (orienté) sur trois sommets



Graphe complet (non-orienté) sur trois sommets



Graphe complet (non-orienté) sur cinq sommets

Définitions et vocabulaire

- Graphe complet :

  - Exercice :
    Donner une méthode pour calculer le nombre d'arêtes d'un graphe complet non-orienté G de n sommets.

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Chemins :

  Soit $G = (E, \Gamma)$ un graphe et soient x_0 et x_k deux sommets de E.

  - Un chemin C de x_0 à x_k est une séquence ordonnée $C = (x_0, \ldots, x_k)$ de sommets de E telle que :

    $$\forall i \in [1, k],\ x_i \in \Gamma(x_{i-1}).$$

  - chaque sommet x_i du chemin est un successeur du sommet x_{i-1}.
  - Une séquence telle que $C = (x_0)$ est également appelée chemin de x_0 à x_0 (chemin trivial).
  - k est la longueur du chemin. Pour un chemin trivial $k = 0$.
  - Un chemin C est un circuit si $x_0 = x_k$ avec $k > 0$.

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Le chemin C est dit élémentaire si les sommets *xi* sont tous distincts (sauf éventuellement x_0 et x_k).

- Proposition :

Soit $G = (E, \Gamma)$, avec $|E| = n$.

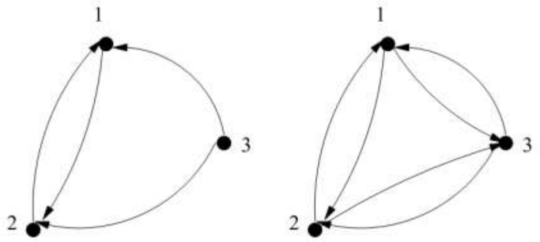
La longueur d'un chemin élémentaire (qui n'est pas un circuit) dans G est inférieure ou égale à n-1.

De même la longueur d'un circuit élémentaire est inférieure ou égale à n.

Définitions et vocabulaire

Soit $G = (E, \Gamma)$, et Γ_s la fermeture symétrique de Γ.

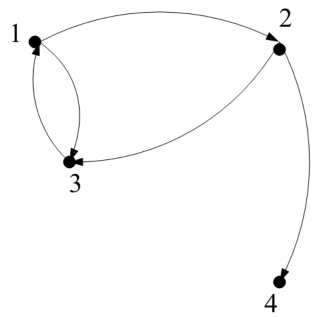
- On appelle chaîne tout chemin dans (E, Γ_s).
- On appelle cycle tout circuit dans (E, Γ_s) ne passant pas deux fois par la même arête.



Graphe G   Fermeture symétrique de G

Définitions et vocabulaire

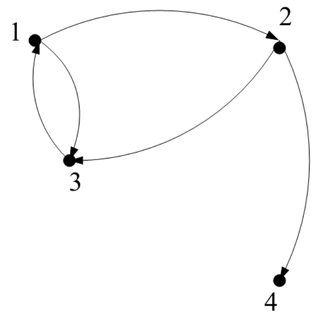
- Exemple :



(1,2,1) ; (1,2,3,1,2,4) ; (1,2,3) ; (4,2,1) ; (1,3,2,1) ; (1,2,3,1)
(1,3,1).

Définitions et vocabulaire

- Exemple :



- $(1,2,1)$ n'est pas un chemin.
- $(1,2,3,1,2,4)$ est un chemin.
- $(4,2,1)$ est une chaîne.
- $(1,3,2,1)$ n'est pas un circuit.
- $(1,3,1)$ n'est pas un cycle.
- $(1,2,3)$ est un chemin.
- $(4,2,1)$ n'est pas un chemin.
- $(1,2,3,1)$ est un circuit.
- $(1,3,2,1)$ est un cycle.

Définitions et vocabulaire

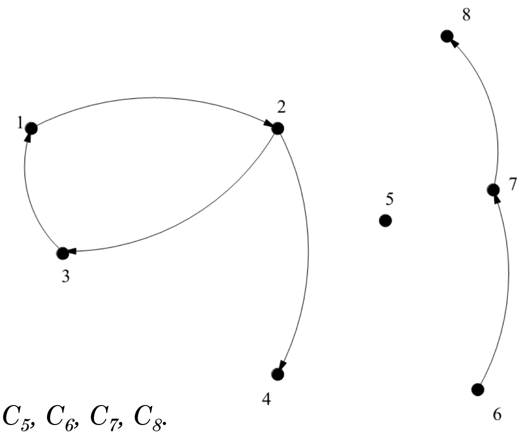
- Composante connexe
  - Soit $G = (E, \Gamma)$ et $x \in E$. On définit C_x , la composante connexe de G contenant x par :

$$C_x = \{y \in E \mid \text{il existe une chaîne de } x \text{ à } y\}$$

  - C_x est l'ensemble des sommets qu'il est possible d'atteindre par une chaîne à partir de x.

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

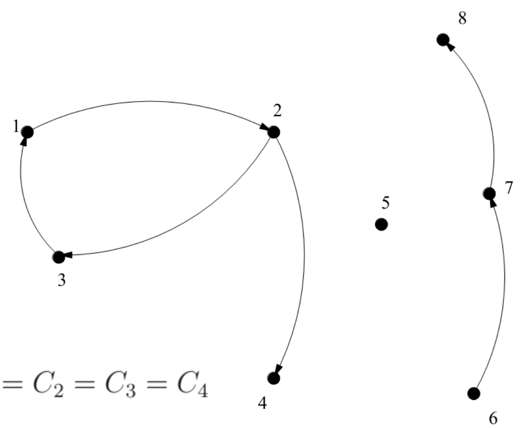
- Exemple :



  - C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8.

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Exemple :



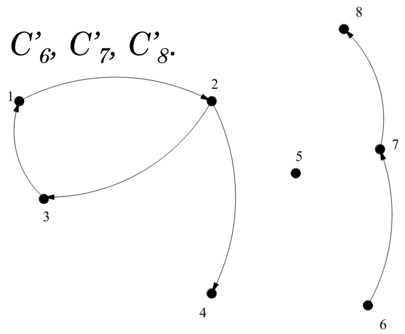
– $C_1 = \{1, 2, 3, 4\} = C_2 = C_3 = C_4$
– $C_5 = \{5\}$
– $C_6 = C_7 = C_8 = \{6, 7, 8\}$

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Composante fortement connexe
  - Soit $G = (E, \Gamma)$ et $x \in E$. On définit C_x', la composante fortement connexe de G contenant x par :

$$C'_x = \{y \in E \mid \text{il existe un chemin de } x \text{ à } y \text{ et il existe un chemin de } y \text{ à } x\}$$

  - $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, C'_5, C'_6, C'_7, C'_8$.

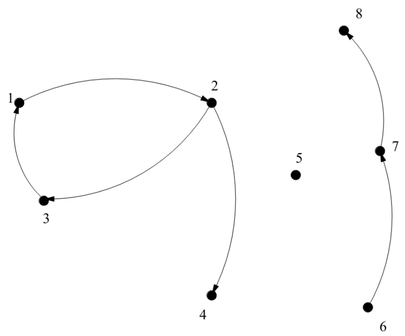


DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Composante fortement connexe
  - Soit $G = (E, \Gamma)$ et $x \in E$. On définit C_x', la composante fortement connexe de G contenant x par :

$$C'_x = \{y \in E \mid \text{il existe un chemin de } x \text{ à } y \text{ et il existe un chemin de } y \text{ à } x\}$$

- $C'_1 = \{1, 2, 3\} = C'_2 = C'_3$
- $C'_4 = \{4\}$
- $C'_5 = \{5\}$
- $C'_6 = \{6\}$
- $C'_7 = \{7\}$
- $C'_8 = \{8\}$



Exercices :

- <u>Exercice 1</u>

  Trois professeurs P_1, P_2, P_3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C_1, C_2, C_3:

  P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et 1 heure à C_2

  P_2 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 1 heure à C_3

  P_3 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 2 heures à C_3

  - Comment représenter cette situation par un graphe ?
  - Quel type de graphe obtenez-vous ?
  - Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ?
  - Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

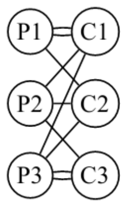
24/04/2018

33

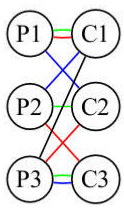
Exercices :

- Solution exercice 1 :

  - On obtient le graphe biparti suivant :



  - En colorant les arêtes de ce graphe (1 couleur = 1 heure).
  - En prenant garde que chaque sommet n'ait pas deux arêtes incidentes de même couleur, on obtient le résultat suivant :



24/04/2018

34

EXERCICES :

Solution exercice 1 :

- Du graphe coloré, on tire l'horaire suivant :

	P1	P2	P3
1ère heure (rouge)	C1	C3	C2
2ème heure (vert)	C1	C2	C3
3ème heure (bleu)	C2	C1	C3
4ème heure (noir)			C1

EXERCICES :

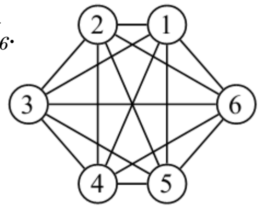
Exercice 2

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

- Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
- Quel type de graphe obtenez-vous ?
- Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?
- Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

EXERCICES :

- **Solution exercice 2 :**
  - On obtient le graphe complet K_6.

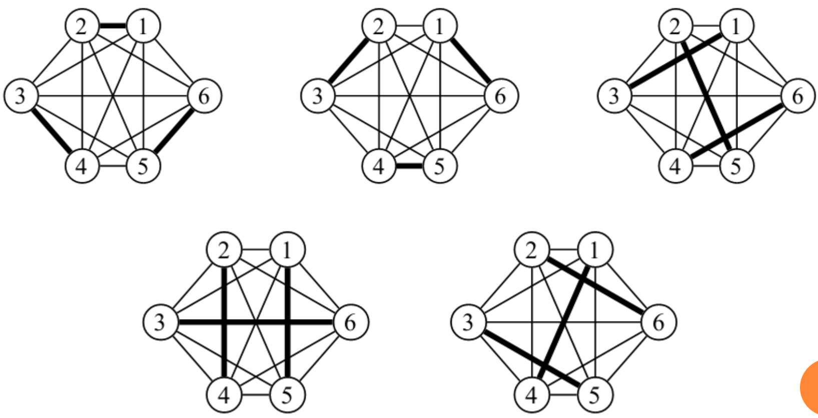


  - Il faudra jouer 5 jours pour terminer le tournoi.
  - Un calendrier possible des matches :

Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5
1-2	2-3	1-3	2-4	1-4
3-4	4-5	4-6	1-5	2-6
5-6	1-6	2-5	3-6	3-5

EXERCICES :

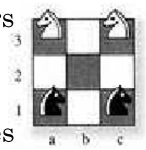
- **Solution exercice 2 :**



Exercices :

- Exercice 3

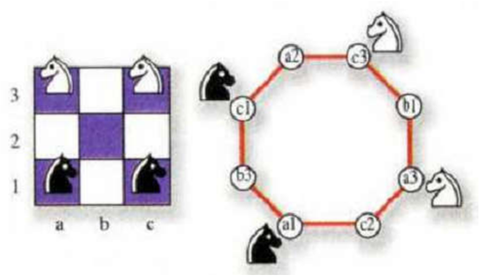
  Sur un échiquier 3×3 , les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a1 et c1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a3 et c3.



  - En utilisant un graphe, déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa. Les blancs commencent.

Exercices :

- Solution exercice 3



  - Les mouvements peuvent être par exemple : c3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2, b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3, c3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2, b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3.

EXERCICES :

- Exercice 4

  - On appelle degré du sommet x , et on note $d(x)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.
  - Une boucle sur un sommet compte double.

  - *Lemme des poignées de mains* : Démontrez que la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

  - Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

EXERCICES :

- Solution exercice 4

  - Soit $G = (E, V)$ un graphe simple. Quand on calcule la somme des degrés des sommets, chaque arête (x, y) de E est comptée deux fois, une première fois pour d(x) et une seconde fois pour d(y). Donc, cette somme est finalement égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Exercices :

24/04/2018

- Solution exercice 4
  - Notons P l'ensemble des sommets de degré pair et I l'ensemble des sommets de degré impair d'un graphe simple G=(V,E). P et I forment une partition de V.
  - D'après le lemme des poignées de mains, on a :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E| = \sum_{v \in P} d(v) + \sum_{v \in I} d(v)$$

  - Or 2.|E| et $\sum_{v \in P} d(v)$ sont des entiers pairs. $\sum_{v \in I} d(v)$ est également pair, puisque c'est la différence de deux entiers pairs.
  - Chaque terme de la somme $\sum_{v \in I} d(v)$ est impair. Elle ne peut donc être paire que si le nombre de termes est pair.

43

Exercices :

24/04/2018

- Exercice 5
  - Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

44

EXERCICES :

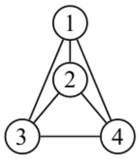
- Solution exercice 5
  - Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?
  - Considérons le graphe simple dont les sommets représentent les 15 ordinateurs et les arêtes représentent les liaisons entre ces ordinateurs.
  - Si chaque appareil est relié à exactement 3 ordinateurs du réseau, les sommets du graphe sont tous de degré impair.
  - D'après le résultat établi dans l'exercice 4, un tel graphe doit posséder un nombre pair de sommets, le réseau est donc impossible.

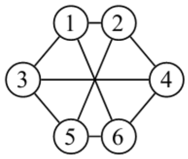
EXERCICES :

- Exercice 6
  - Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.
  - Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier. Si le degré commun est k , alors on dit que le graphe est k-régulier.
  - On s'intéresse aux graphes 3-réguliers. Construisez de tels graphes ayant 4, 5, 6, puis 7 sommets.
  - Qu'en déduisez-vous ?
  - Prouvez-le !

EXERCICES :

- Solution exercice 6
  - Ci-dessous deux graphes 3-réguliers (4 et 6 sommets) :





  - On constate qu'il n'existe pas de graphes 3-réguliers ayant un nombre impair de sommets.
  - le nombre d'arêtes d'un graphe cubique à n sommets est 3n/2, qui n'est entier que lorsque n est pair.

EXERCICES :

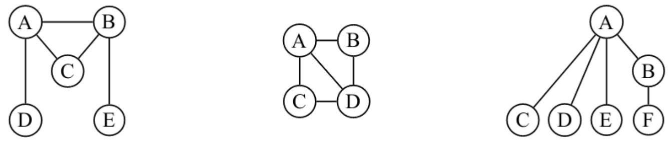
- Exercice 7
  - Une suite décroissante d'entiers est graphique s'il existe un graphe simple dont les degrés des sommets correspondent à cette suite. Par exemple, un triangle correspond à la suite (2, 2, 2).
  - Les suites suivantes sont-elles graphiques :

(3, 3, 2, 1, 1), (3, 3, 1, 1), (3, 3, 2, 2), (4, 2, 1, 1, 1, 1), (5, 3, 2, 1, 1, 1), (5, 4, 3, 1, 1, 1, 1).

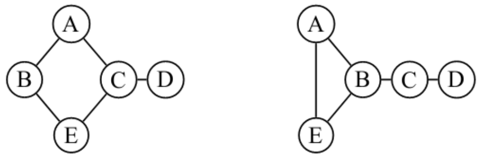
  - Trouvez deux graphes correspondant à la suite (3,2, 2,2,1).

EXERCICES :

- Solution exercice 7
  - Les suites (3, 3, 2, 1, 1), (3, 3, 2, 2) et (4, 2, 1, 1, 1, 1) sont graphiques :



  - Les graphes ci-dessous correspondent tous deux à la suite (3, 2, 2, 2, 1) :



DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Définitions
  - Soit un graphe (orienté) $G=(E, \Gamma)$ et un sommet $x \in E$. On définit le degré extérieur de x, noté $d^+(x)$ par :

$$d^+(x) = |\Gamma(x)|$$

  - Le degré extérieur est le nombre de successeurs de x.
  - On définit le degré intérieur de G, noté $d^-(x)$ par :

$$d^-(x) = |\Gamma^{-1}(x)|$$

  - Le degré intérieur est le nombre de prédécesseurs de x.
  - Le degré du sommet x est défini par :

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

EXERCICES :

- Montrez que la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe *G* quelconque est paire.

- Peut-on tracer dans le plan cinq droites distinctes, telles que chacune d'entre elles ait exactement trois points d'intersection avec les autres ? En modélisant ce problème par un graphe, démontrez que cela n'est pas possible.

- "dans toute réunion, il y a au moins deux personne ayant le même nombre d'amis présents" (on suppose la relation d'amitié symétrique).
  A quelle propriété correspond cette affirmation? Cette propriété est elle fausse ou vraie? Donnez une preuve de ce que vous avancez.

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

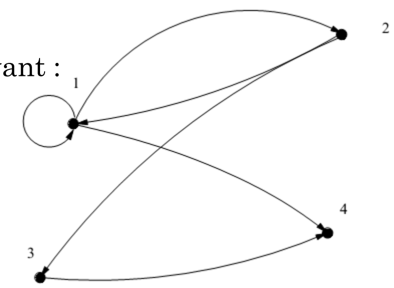
- Représentation matricielle :

  - Soit $G=(E, \Gamma)$, avec $|E|=n$. On peut représenter *G* par la matrice booléenne $M_\Gamma = [m_{ij}]_{i,j=1\ldots n}$, dite matrice d'adjacence de *G*, telle que :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 \text{ si } j \in \Gamma(i) \\ m_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Exemple :
  - Soit le graphe $G=(E, \Gamma)$ suivant :



  - La matrice d'adjacence M_Γ associée à G est la suivante :

	1	2	3	4
1	1	1	0	1
2	1	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- On définit le produit booléen de matrices à partir des opérateurs ∨ (ou) et ∧ (et).
  - Soient $A = [a_{ij}]_{i,j=1\ldots n}$ et $B = [bij]_{i,j=1\ldots n}$ deux matrices booléennes, alors C = A × B =$[c_{ij}]_{i,j=1\ldots n}$ est définie par :

$$\forall i, j = 1 \ldots n \ , \ c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

  - **<u>Proposition :</u>** Soit $M^p = M \times \ldots \times M$ (p fois), où M est la matrice booléenne associée au graphe G. On a :

$M^p_{ij}=1 \Leftrightarrow$ il existe un chemin de longueur p dans G de i à j.

  - **<u>Proposition :</u>** Soit $\hat{M}^p = I \vee M \vee M^2 \vee \ldots \vee M^p$.

On a : $\hat{M}^p_{ij}=1 \Leftrightarrow$ il existe un chemin de longueur $\leq p$ dans G de i à j.

Définitions et vocabulaire

- Exercice :
  - Soit M la matrice booléenne définie par :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - A quoi est égal M^{2006} ? Justifiez votre réponse.

On évitera, le plus possible, les calculs.

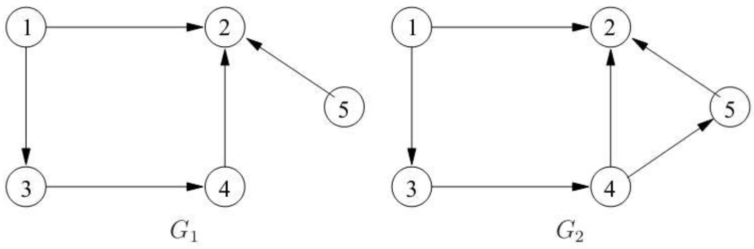
Définitions et vocabulaire

- Graphe biparti :
  - On dit qu'un graphe $G=(E, \Gamma)$ est biparti si l'ensemble E des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles distincts E_1 et E_2 de telle sorte que :

$$\forall (x, y) \in \vec{\Gamma}, \begin{cases} x \in E_1 & \Rightarrow & y \in E_2 \\ x \in E_2 & \Rightarrow & y \in E_1 \end{cases}$$

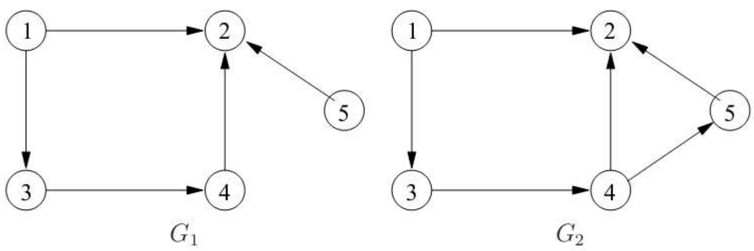
DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Exemple :



DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

- Exemple :



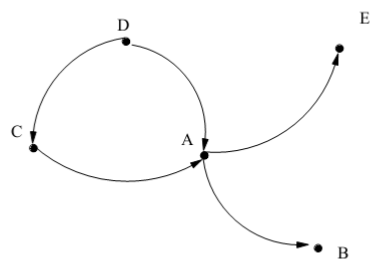
- On voit que G1 est biparti avec E1 = {1,4,5} et E2={2,3}. Le graphe G2 n'est pas biparti.

Arbres et arborescences

- Arbre :
  - Un arbre est un graphe connexe sans cycle.
  - Un arbre ne comporte pas de boucles.
  - Soit G=(E,Γ), tel que $|E|=n \geq 2$ et $|\Gamma|=m$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
    - G est connexe et sans cycle,
    - G est connexe et $m = n - 1$,
    - G est sans cycle et $m = n - 1$,
    - G est sans boucles et il existe une unique chaîne élémentaire joignant tout couple de sommets a et b distincts.

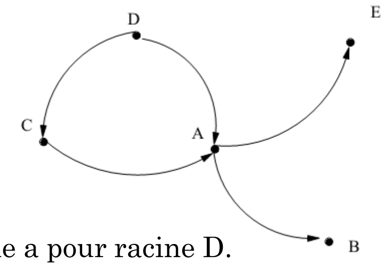
Arbres et arborescences

- Racine :
  - Soit $G= (E,\Gamma)$, $x \in E$. On dit que x est une racine de G si $\forall y \in E \setminus\{x\}$, il existe un chemin de x à y.
- Exemple :



ARBRES ET ARBORESCENCES

- Racine :
  - Soit $G= (E,\Gamma)$, $x \in E$. On dit que x est une racine de G si $\forall y \in E \setminus \{x\}$, il existe un chemin de x à y.
- Exemple :



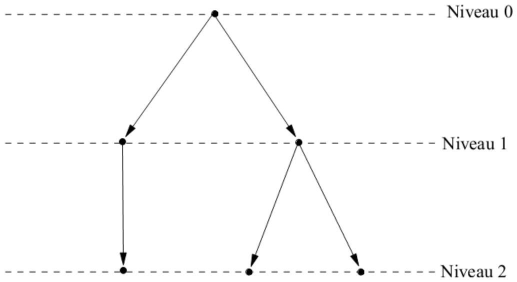
  - Ce graphe a pour racine D.

ARBRES ET ARBORESCENCES

- Arborescences :
  - Soit $G=(E,\Gamma)$ un graphe, soit $r \in E$. Le graphe G est une arborescence de racine r si :
  - G est antisymétrique, et
  - G est un arbre, et
  - r est une racine de G.
  - Un sommet d'une arborescence est appelé une feuille s'il n'a aucun successeur.

ARBRES ET ARBORESCENCES

- Découpage en niveaux :
  - Une arborescence peut être découpée en niveaux .



EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Fausse monnaie :
  - Soit 8 pièces de monnaies, dont une est fausse (elle est plus légère que les autres). On possède deux balances. La balance 1 permet de savoir quel plateau est le plus lourd et ne possède que deux états (<, ≥) ; la balance 2 possède trois états (>, <, =). On cherche à trouver la fausse pièce en minimisant le nombre de pesées.

Pour modéliser la résolution de ce problème, on va utiliser une arborescence.

Exemples et applications

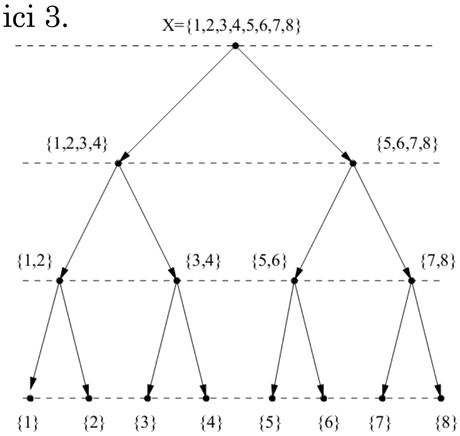
- Arborescence de décision :
  - Soit $G = (E,\Gamma)$ une arborescence de racine $r \in E$. Soit X un ensemble fini (dont les éléments représenteront pour nous les "possibilités").
  - On dit que G est une arborescence de décision sur X s'il existe une application $f : E \to P(X)$ telle que :
    - $f(r) = X$
    - $\forall a \in E \;/\; \Gamma(a) \neq \emptyset,\; f(a) = \bigcup_{b\in\Gamma(a)} f(b),$
    - $\forall a \in E \;/\; \Gamma(a) = \emptyset,\; |f(a)| = 1.$

Exemples et applications

- Dans le cas de notre exemple de la balance 1, on pose 4 pièces sur chaque plateau. Un des deux plateaux sera forcément moins lourd car il contient une fausse pièce.
- On prend le lot de 4 pièces les moins lourdes et on le divise en 2 et ainsi de suite.

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Le nombre de pesées pour trouver la fausse pièce est égale au nombre de niveau du graphe moins 1, soit ici 3.



EXEMPLES ET APPLICATIONS

- On peut suivre la même approche pour la balance 2. On aura alors un arbre à 3 niveaux et une solution en deux pesées.

Exemples et applications

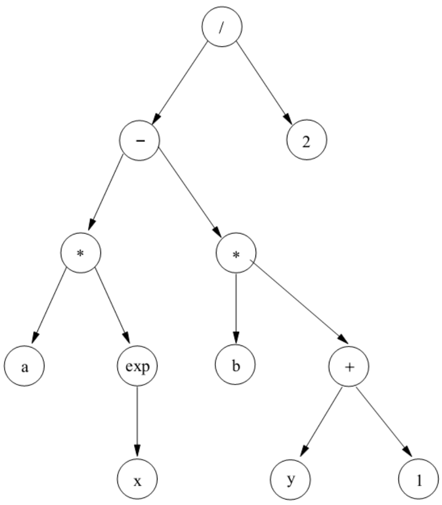
- Arithmétique :
  - On s'intéresse à l'´evaluation d'expressions arithmétiques, en respectant les priorités des différents opérateurs. Soit l'expression arithmétique :

$$(A) = \frac{ae^x - b(y+1)}{2}$$

  - Sur l'arbre (slide suivant) correspondant à l'expression (A), chaque sommet du graphe est soit une donnée (symbolique ou numérique), soit un opérateur.

Exemples et applications

- Arithmétique :
  - Les opérateurs binaires possèdent deux successeurs, les opérateurs unaires en possèdent un.
  - Les données n'ont aucun successeur, ce sont les feuilles de l'arbre.
  - Le problème est l'ordre d'évaluation



EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Arborescence ordonnée :
  - Soit E un ensemble fini
  - On note $O(E)$ l'ensemble des k-uplets ordonnés d'éléments de E.
  - Un couple $\mathring{G}=(E,\mathring{\Gamma})$, où $\mathring{\Gamma}$ est une application de E dans $O(E)$ est appelé un graphe ordonné sur E.

$$\forall a \in E,\ \mathring{\Gamma}(a) = (x_1, \ldots, x_i)$$

24/04/2018

71

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Arborescence ordonnée :
  - A tout graphe ordonné $(E,\mathring{\Gamma})$, on peut faire correspondre le graphe (E,Γ) tel que :

    $\Gamma(a) = \{x_1, \ldots, xi\} = \{$ éléments du k-uplet $\Gamma(a)\}$.
  - On dit que $\mathring{G}=(E,\mathring{\Gamma})$ est une arborescence ordonnée (ou arborescence plane) si (E,Γ) est une arborescence.

24/04/2018

72

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Arborescence de recherche :
  - Soit D un ensemble appelé domaine, muni d'une relation d'ordre total (que l'on notera $\leq$)
  - Soit $X \subset D$ et $n \in D$.

La question que l'on se pose est de savoir si *n* appartient à l'ensemble *X*.

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Arborescence de recherche :
  - On prend D égal à l'ensemble des chaînes de caractères alphabétiques.
  - X une partie de ces chaînes (l'ensemble des mots d'un dictionnaire).
  - $\leq$ représentant l'ordre lexicographique usuel.

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Arborescence de recherche :
  - On considère le domaine $D = \mathbb{N}$.
  - X une partie de $\mathbb{N}$.
  - $\leq$ l'ordre habituel sur les entiers naturels.

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Arborescence de recherche :
  - La recherche d'un élément dans l'ensemble X est beaucoup plus rapide si :
    - X est un arbre binaire.
    - L'arborescence est ordonnée.
    - pour tout sommet x, toute valeur située dans la sous-arborescence gauche de x est inférieure à la valeur associée à x, et toute valeur située dans la sous-arborescence droite de x est supérieure à la valeur associée à x.

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Arborescence de recherche :

  - Il faut de plus que l'arborescence soit équilibrée

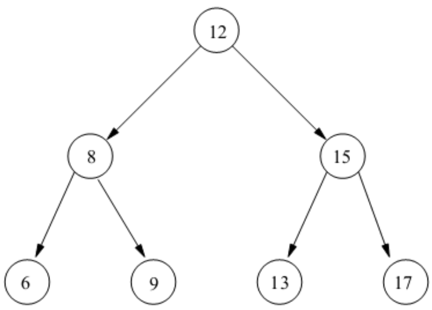
Une arborescence binaire respectant toutes ces conditions ci-dessus est appelée arborescence de recherche

24/04/2018

77

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Arborescence de recherche :



  - Arborescence de recherche pour la relation $\leq$ définie sur le domaine $\mathbb{N}$, avec $X = \{6, 8, 9, 12, 15, 13, 17\}$.

24/04/2018

78

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Exercice :

  - Ecrivez un algorithme permettant de tester la présence d'une valeur donnée *v* dans une arborescence de recherche.

24/04/2018

79

EXEMPLES ET APPLICATIONS

- Exercice :

  - Ecrivez deux programmes récursifs, l'un permettant d'afficher les valeurs d'une arborescence de recherche dans l'ordre croissant, l'autre dans l'ordre décroissant.

24/04/2018

80

PROBLÈME DU PLUS COURT CHEMIN

Recherche de chemin le plus cours

- Dans un problème de plus court chemin, on considère un graphe orienté $G = (E, \Gamma)$.
- Chaque arc est muni d'un poids.
- Un chemin $C = (X_1, \ldots, X_n)$ possède un poids égale la somme des poids des arcs de C.
- Le plus court chemin d'un sommet X à un sommet Y est le chemin de poids minimum qui relie X et Y.

Recherche de chemin le plus cours

24/04/2018

- En générale, on cherche à trouver les chemins les plus courts d'un sommet particulier à tout les autres sommets du graphe.

83

Recherche de chemin le plus cours

24/04/2018

- Algorithme de Moore-Dijkstra

  Dans cet algorithme on suppose que les poids sont tous positifs ou nuls.

Initialisation :

- **On note *S* un ensemble dans lequel on peut ajouter des sommets (au départ il contient le sommet source).**
- **A chaque sommet du graphe on associe un couple (*distance provisoire*, *prédécesseur*) de la façon suivante :**
  - **Au sommet source on associe le couple (0 , A).**
  - **A chaque sommet *Y* adjacent au sommet source on associe le couple (*poid_arc*(*A*, *Y*),*A*).**
  - **A tout les autres sommets on associe le couple (Inf,?).**

84

RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURS

- Algorithme de Moore-Dijkstra

<u>Itération :</u>

Tant que **: tous les sommets ne sont pas dans *S* et qu'il en existe un dont la distance provisoire est différente de +∞.**

-Choisir parmi les sommets n'appartenant pas à *S* un de dont la distance provisoire est minimale.
- Soit *X* ce sommet :
-Mettre *X* dans *S*
-Pour chaque sommet *Y* adjacent à *X* et qui n'est pas dans *S* :
- calculer *d = distance provisoire X + poids(X,Y)*
- Si *d* < *distance provisoire de Y* associer a *Y* (*d*,*X*).

RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURT

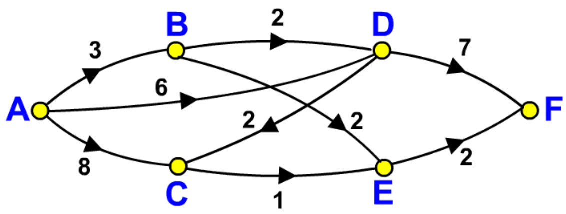
A la fin de l'algorithme de Moore-Dijkstra :

- les sommets qui ne sont pas dans S ne peuvent être atteints à partir du sommet source.

- pour tous les sommets de S :
  - distance provisoire est la distance minimale à partir du sommet source.
  - prédécesseur est le sommet qui précède dans le chemin le plus court depuis la source.

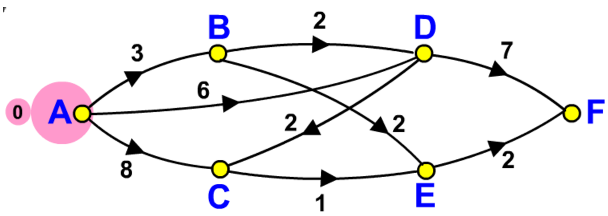
Recherche de chemin le plus cours

- Exemple d'exécution :



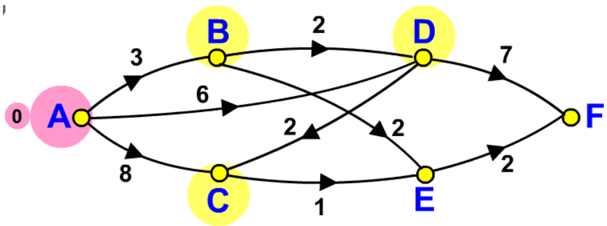
Recherche de chemin le plus cours

- Exemple d'exécution :



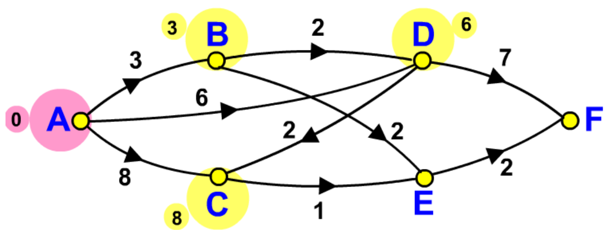
RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURS

- Exemple d'exécution :



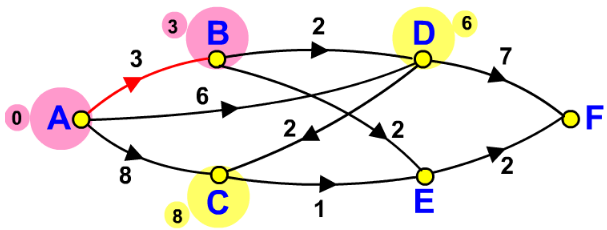
RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURS

- Exemple d'exécution :



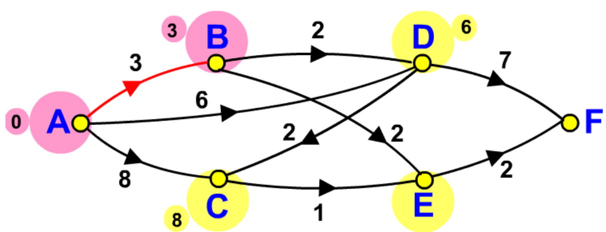
RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURS

- Exemple d'exécution :



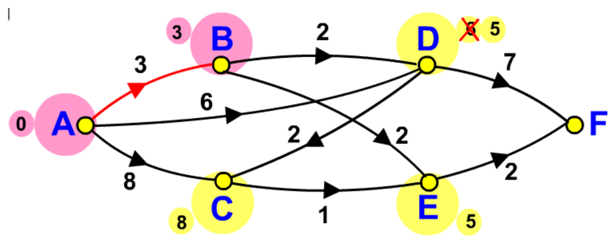
RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURS

- Exemple d'exécution :



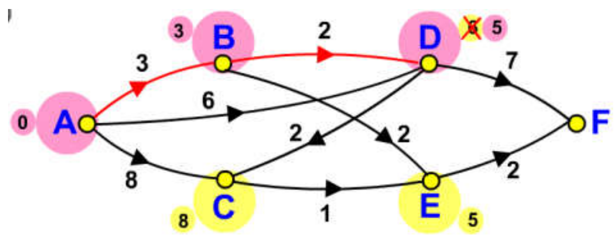
RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURS

- Exemple d'exécution :



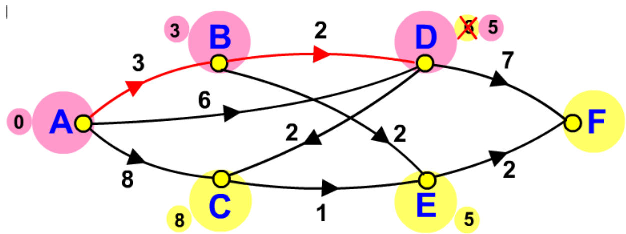
RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURS

- Exemple d'exécution :



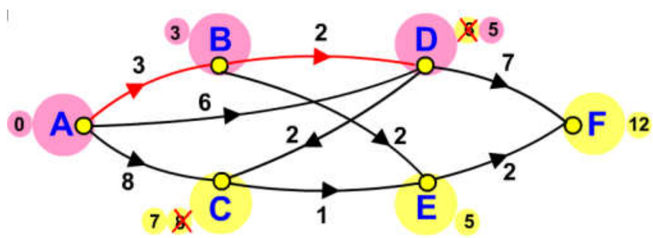
Recherche de chemin le plus cours

- Exemple d'exécution :



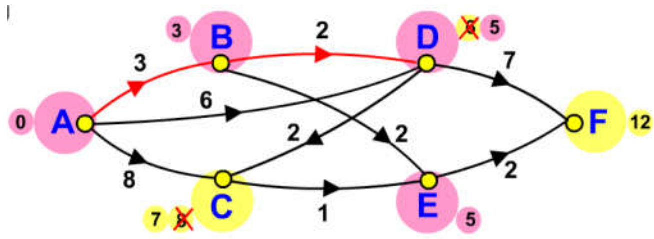
Recherche de chemin le plus cours

- Exemple d'exécution :



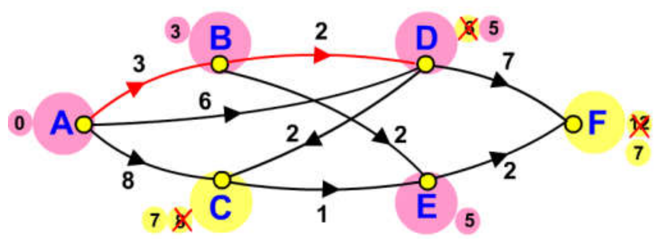
RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURS

- Exemple d'exécution :



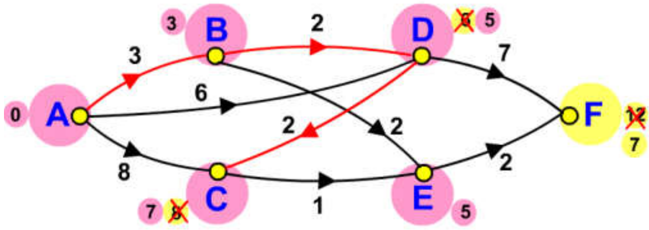
RECHERCHE DE CHEMIN LE PLUS COURS

- Exemple d'exécution :



Recherche de chemin le plus cours

- Exemple d'exécution :

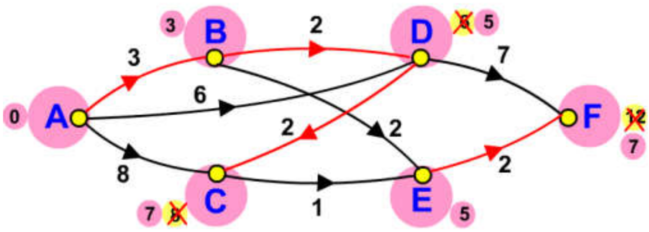


24/04/2018

99

Recherche de chemin le plus cours

- Exemple d'exécution :



24/04/2018

100

Arbre couvrant de poids minimum

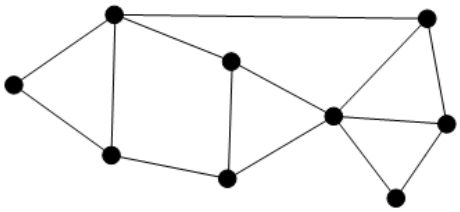
Arbre couvrant

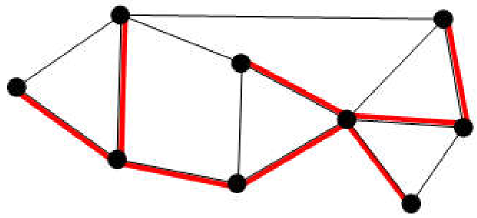
- Soit G(E,V) un graphe.
- Un arbre couvrant G'(E,V') est une sous-graphe de G tel que :
  - G' est un arbre
  - V' ⊂ V
  - Si le nombre de sommets du graphe est n le nombre d'arrêtes de l'AC est n-1.
- Le poids de G' est défini par :

$$W = \sum_{i,j \in V'} M_{ij}$$

ARBRE COUVRANT

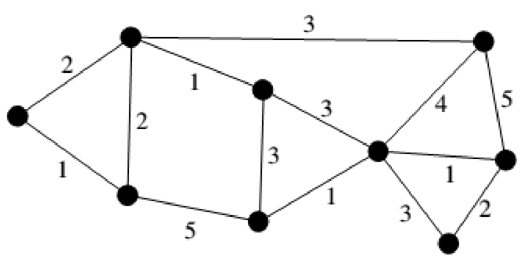
- Exemple :





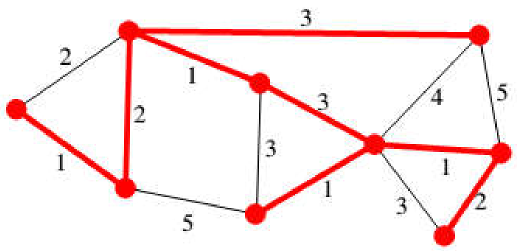
ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM

- Arbre couvrant d'un graphe dont le poids total des arêtes est minimal.



Arbre couvrant de poids minimum

- Arbre couvrant d'un graphe dont le poids total des arêtes est minimal.



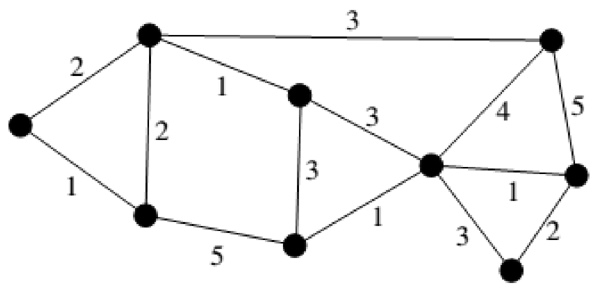
Arbre couvrant de poids minimum

- **Algorithme de Kruskal**

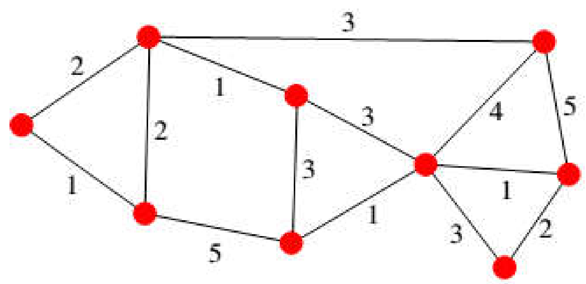
- Initialiser T avec
  - sommets : tous les sommets de G
  - arêtes : aucune
- Traiter les arêtes de G l'une après l'autre par poids croissant :
  - Si une arête permet de connecter deux composantes connexes de T,
    - alors l'ajouter à T
    - sinon ne rien faire
  - Passer à l'arête suivante
- S'arrêter quand il n'y a plus d'arêtes
- Retourner T

ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM

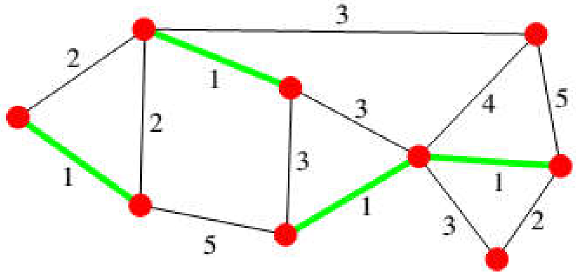
- Exemple :
  - Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe suivant



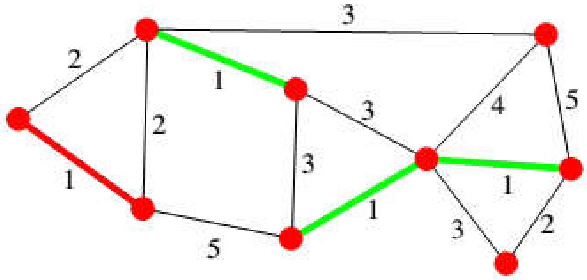
ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM



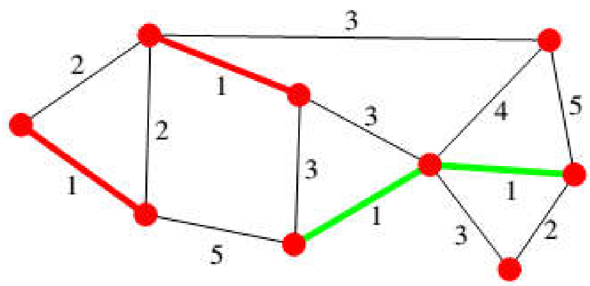
Arbre couvrant de poids minimum



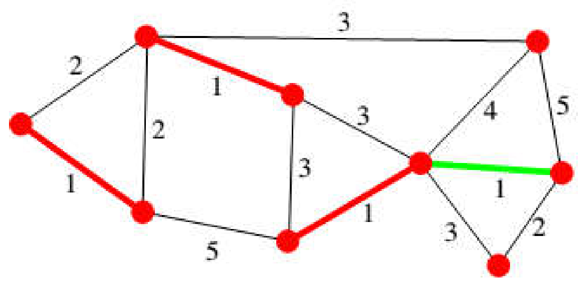
Arbre couvrant de poids minimum



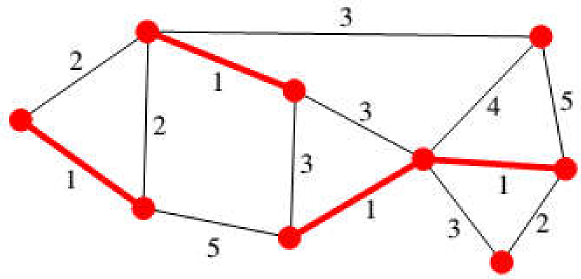
Arbre couvrant de poids minimum



Arbre couvrant de poids minimum

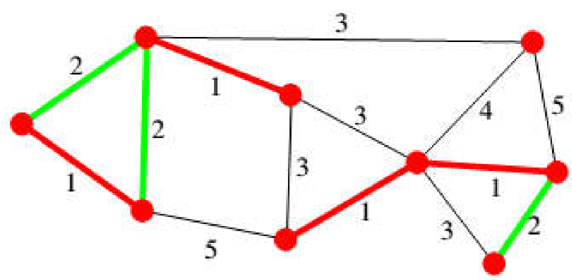


Arbre couvrant de poids minimum

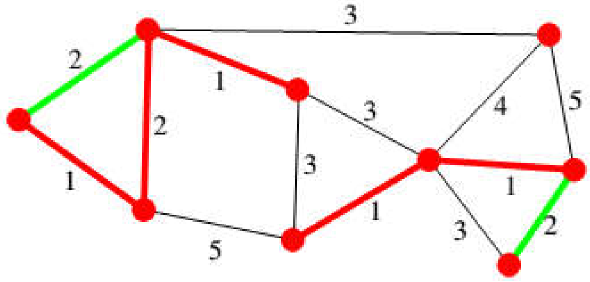


Arbre couvrant de poids minimum

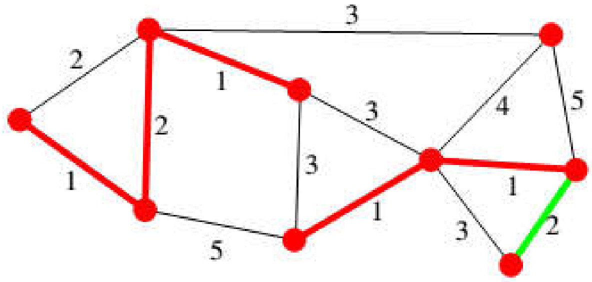
24/04/2018



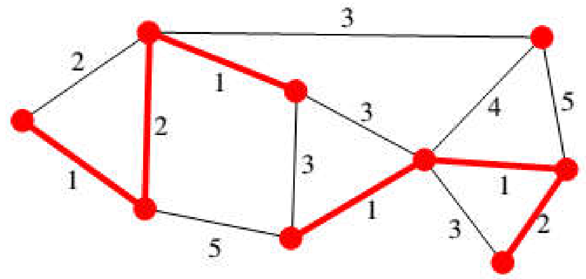
Arbre couvrant de poids minimum



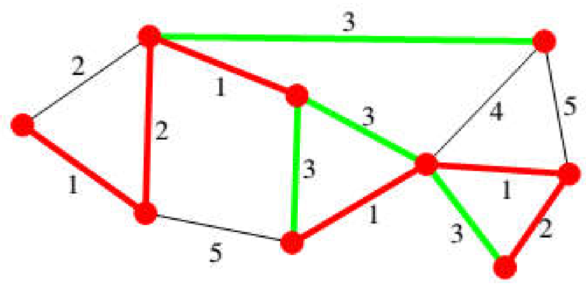
Arbre couvrant de poids minimum



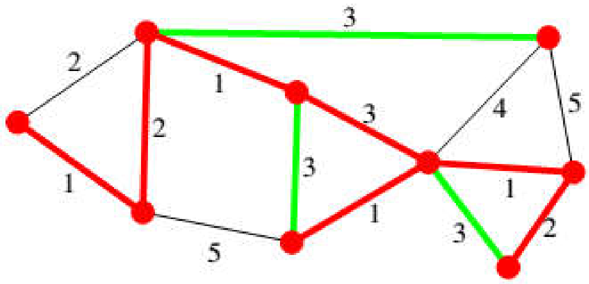
Arbre couvrant de poids minimum



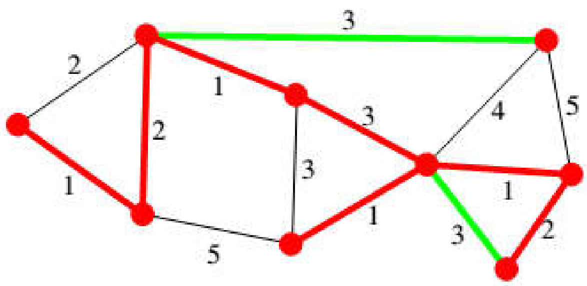
Arbre couvrant de poids minimum



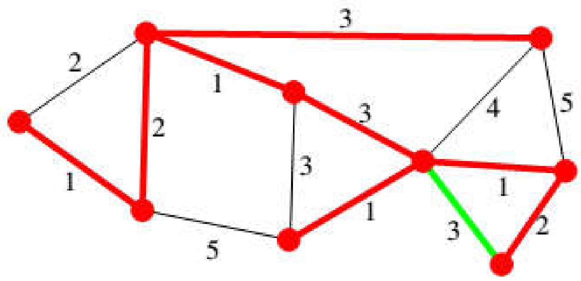
Arbre couvrant de poids minimum



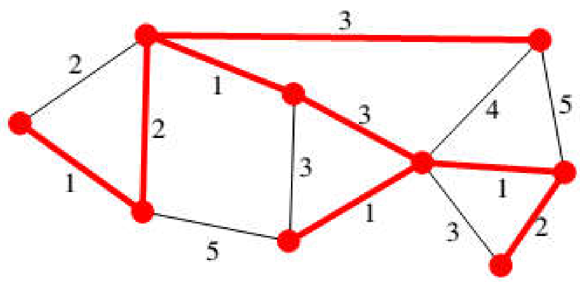
Arbre couvrant de poids minimum



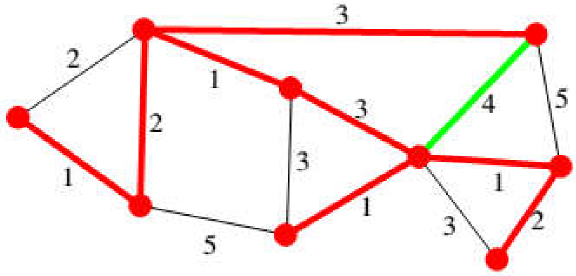
Arbre couvrant de poids minimum



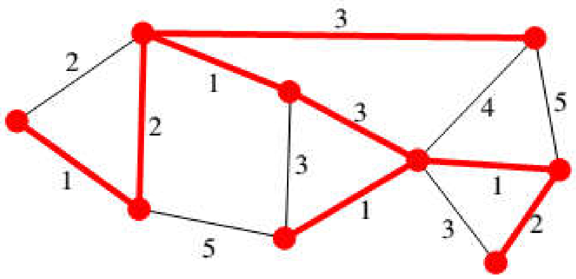
Arbre couvrant de poids minimum



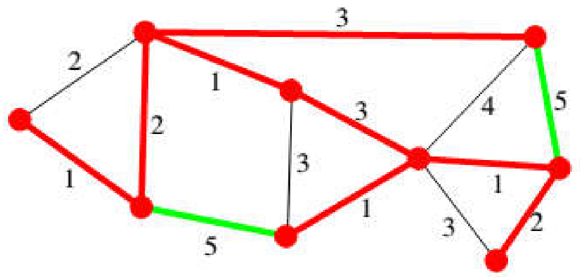
ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM



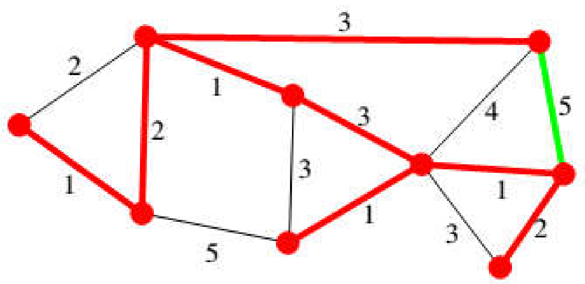
ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM



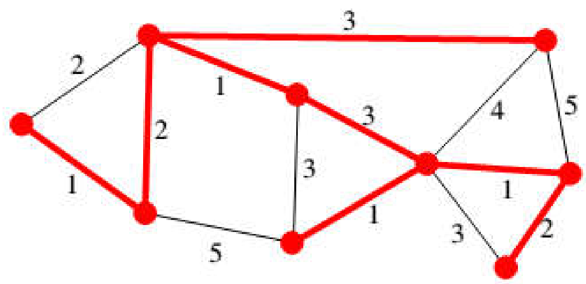
Arbre couvrant de poids minimum



Arbre couvrant de poids minimum



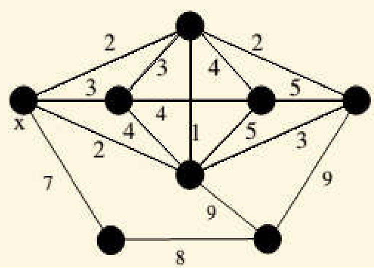
ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM



$1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 14$

ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM

Appliquer l'algorithme de KRUSKAL au graphe *G* suivant.



LISTE DES ALGORITHMES DE LA THÉORIE DES GRAPHES

- Algorithmes de parcours d'un graphe
- Algorithmes de Plus Courts Chemins
- Algorithmes d'arbres couvrants de poids minimum
- Algorithmes pour les flots maximums
- Algorithmes pour les flots à coût minimum

LISTE DES ALGORITHMES DE LA THÉORIE DES GRAPHES

- Algorithmes de parcours d'un graphe :
  - Algorithme de parcours en largeur BFS (Breadth First Search)
  - Algorithme de parcours en profondeur DFS (Depth First Search)
  - …

Liste des algorithmes de la théorie des graphes

- Algorithmes de Plus Courts Chemins :
  - Algorithme de Dijkstra
  - Algorithme de Dantzig
  - Algorithme de Bellman-Moore
  - Algorithme de Ford-Bellman
  - …

Liste des algorithmes de la théorie des graphes

- Algorithmes d'arbres couvrants de poids minimum :
  - Algorithme de Kruskal
  - Algorithme de Prim
  - Algorithme de Borůvka
  - …

Liste des algorithmes de la théorie des graphes

- Algorithmes pour les flots maximums
  - Algorithme de Ford-Fulkerson
  - Algorithme de Roy

Liste des algorithmes de la théorie des graphes

- Algorithmes pour les flots à coût minimum
  - Algorithme de Busacker et Gowen
  - Algorithme de Klein