ÉQUILIBRE des CORPS RIGIDES:

Équilibre dans un espace 3D

A. Ramadane, Ph.D.

ÉQUILIBRE des CORPS RIGIDES en 3D

Les conditions d'équilibre
des **corps rigides dans l'espace**
sont les suivantes:

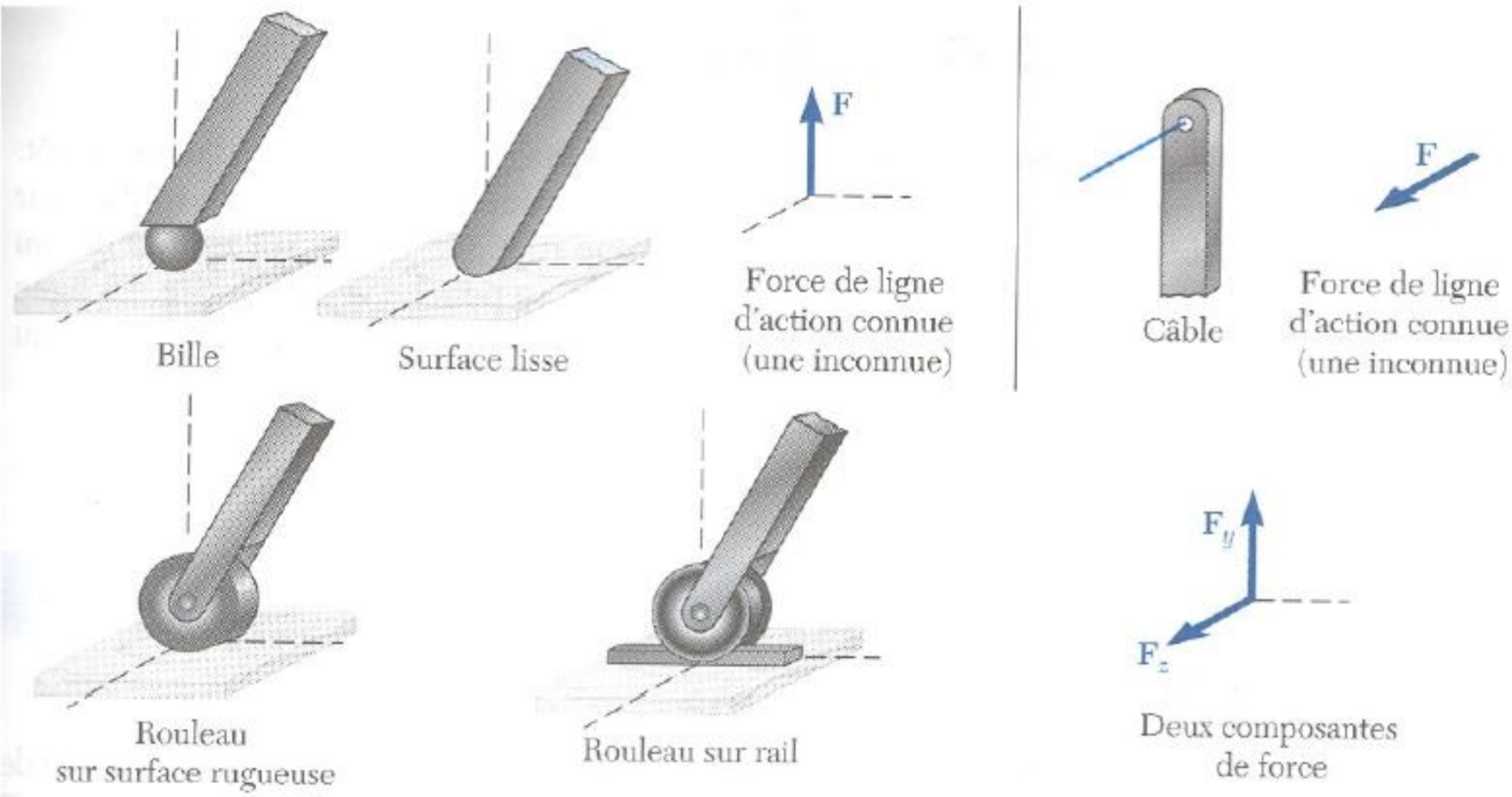
Vectoriellement:

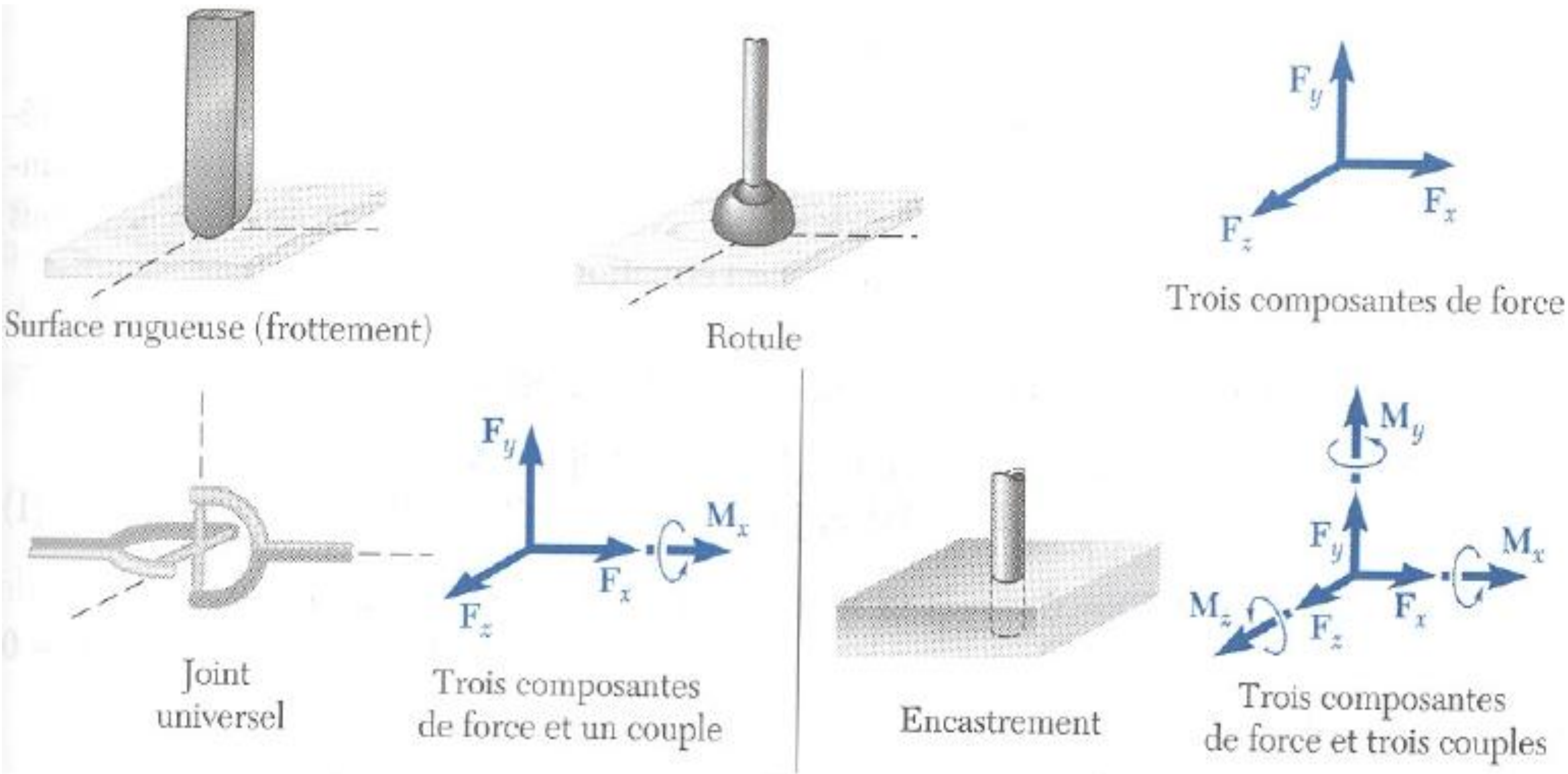
$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

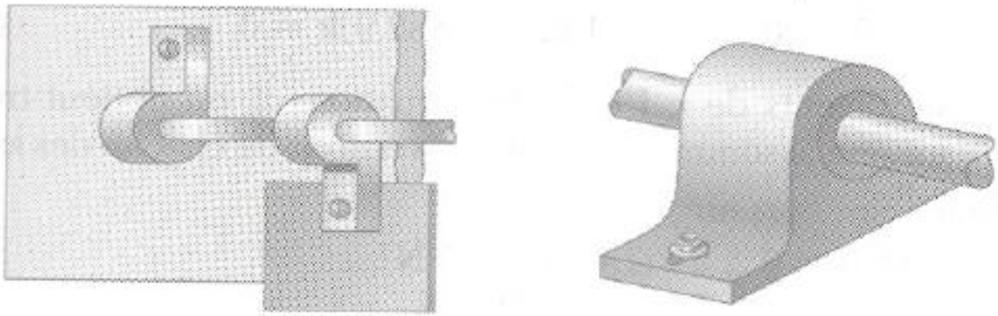
Scalairement:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$
$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

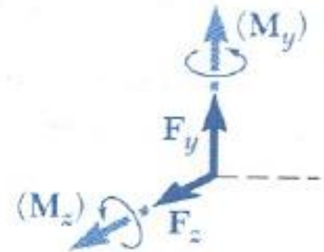
Les **6 équations**
donnent une solution pour un maximum
de **6 inconnues**.


F
Force de ligne d'action connue (une inconnue)
Bille
Surface lisse
F
Câble
Force de ligne d'action connue (une inconnue)
Rouleau sur surface rugueuse
Rouleau sur rail
F_y
F_z
Deux composantes de force


Surface rugueuse (frottement)
Rotule
F y
F x
F z
Trois composantes de force
Joint universel
F y
M x
F x
F z
Trois composantes de force et un couple
Encastrement
M y
F y
M x
M z
F x
F z
Trois composantes de force et trois couples

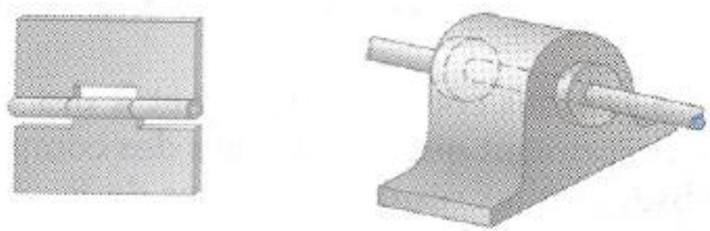


Charnière et palier à charge radiale

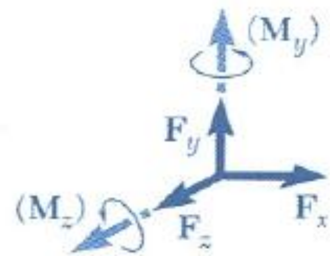


Deux composantes de force et deux couples

Cheville et support



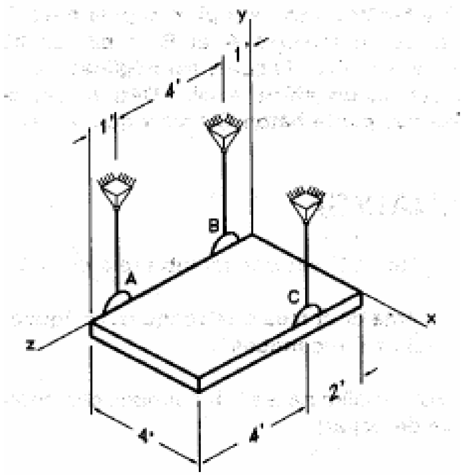
Charnière et palier à poussée axiale et charge radiale

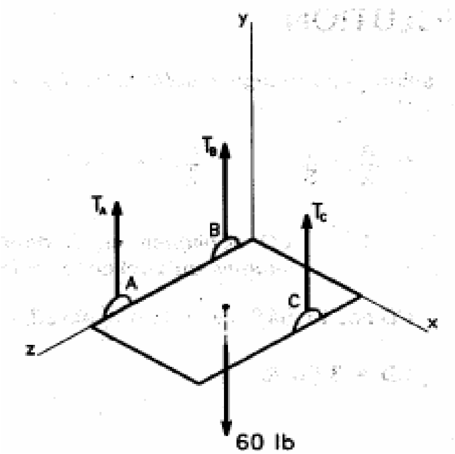


Trois composantes de force et deux couples

ÉQUILIBRE des CORPS RIGIDES en 3D

Exemple 1





On cherche les tensions dans les câbles

3 inconnues
donc
3 équations d'équilibre indépendantes / 6
sont nécessaires:

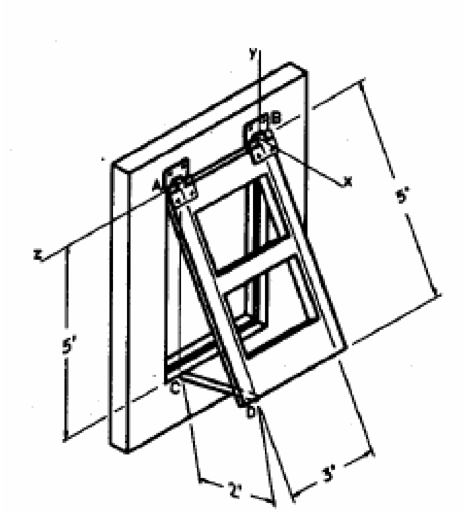
$\Sigma M_{Az} = 0$, permet de déterminer T_C

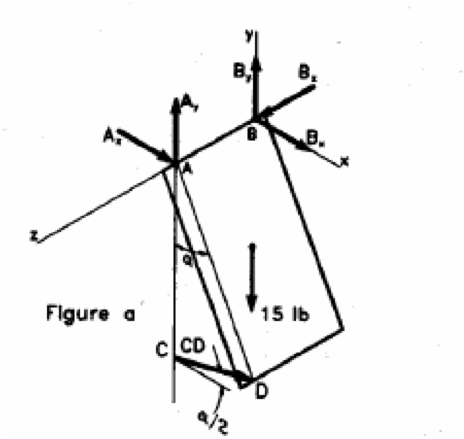
$\Sigma M_{Bx} = 0$, permet de déterminer T_A

$\Sigma F_y = 0$, permet de déterminer T_B

ÉQUILIBRE des CORPS RIGIDES en 3D

Exemple 2





On cherche la force exercée par le bâton CD
et les réactions en A et B

6 inconnues
donc
6 équations d'équilibre indépendantes
sont nécessaires:

$\Sigma M_{AB} = 0$, permet de déterminer CD

$\Sigma M_{Ax} = 0$, permet de déterminer B_y

$\Sigma M_{Ay} = 0$, permet de déterminer B_x

$\Sigma F_z = 0$, permet de déterminer B_z

$\Sigma F_y = 0$, permet de déterminer A_y

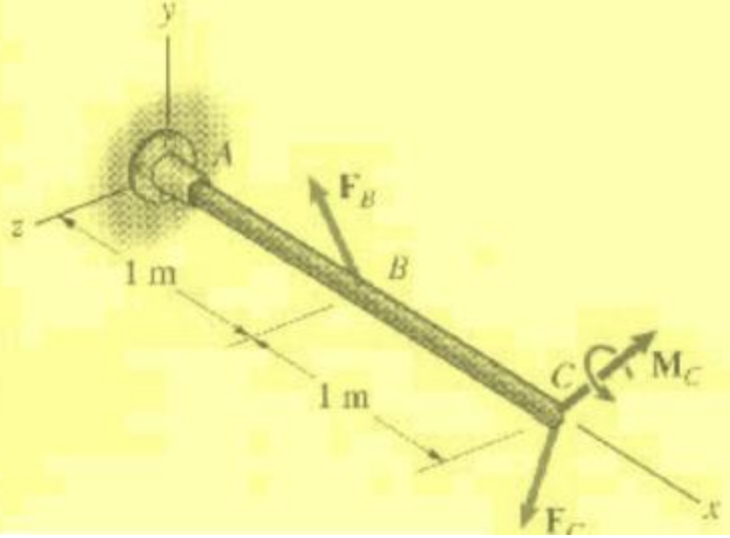
$\Sigma F_x = 0$, permet de déterminer A_x

Exemple

La barre ABC suivante est encastrée au point A.
Deux forces et un moment y sont appliqués.

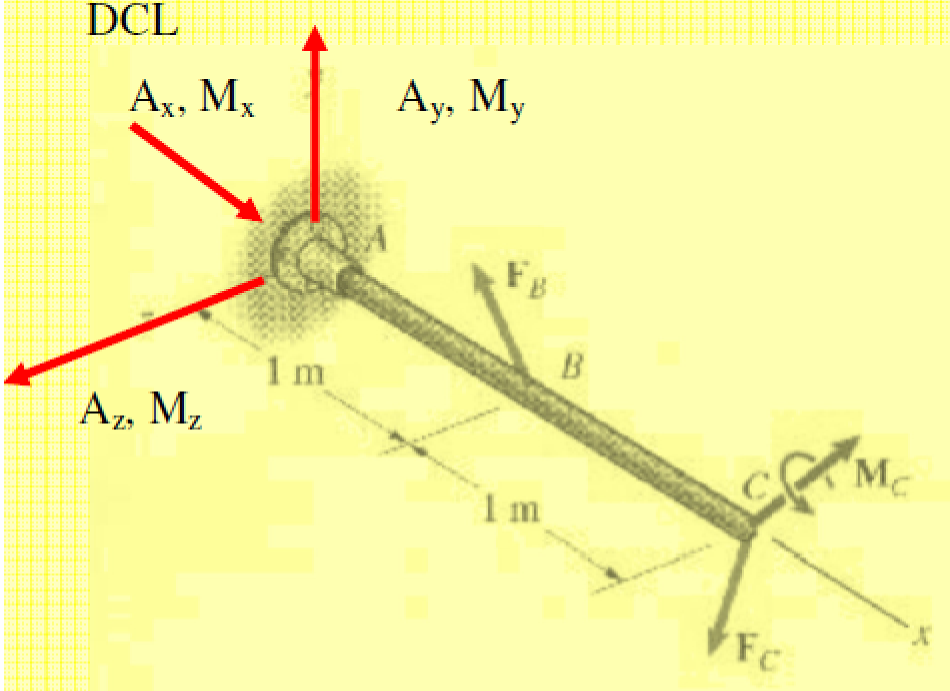
$\mathbf{F}_B = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ kN
$\mathbf{F}_C = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ kN et
$\mathbf{M}_C = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ kNm

Déterminez les réactions en A.



Solution

DCL



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_x = A_x + 2\,kN + 1\,kN = 0 \rightarrow A_x = -3\,kN$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = A_y + 6\,kN - 2\,kN = 0 \rightarrow A_y = -4\,kN$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum F_z = A_z + 3\,kN - 2\,kN = 0 \rightarrow A_z = -1\,kN$$

Pour le calcul des moments, il est préférable d'utiliser le calcul vectoriel (matrice).

$$M_{A\,Fb} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ d_x & d_y & d_z \\ f_{bx} & f_{by} & f_{bz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (0*3-0*6)i + \ (0*2-1*3)j + \ (1*6-0*2)k = (-3j+6k)\ kNm$$

$$M_{A\,Fc} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ d_x & d_y & d_z \\ f_{cx} & f_{cy} & f_{cz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \big(0*(-2)-0*(-2)\big)i + \big(0*1-2*(-2)\big)j + \ (2*(-2)-0*1)k$$

$$= (4j-4k)\ kNm$$

$$\sum M_{AX} = 0$$

$$\sum M_{AX} = M_x + M_{cx} = 0 \rightarrow M_x = -2\,kNm$$

$$\sum M_{Ay} = 0$$

$$\sum M_{Ay} = M_y - 3 + 4 + M_{cy} = 0 \rightarrow M_y = 2\,kNm$$

$$\sum M_{Az} = 0$$

$$\sum M_{Az} = M_z + 6 - 4 + M_{cz} = 0 \rightarrow M_z = 0\,kNm$$

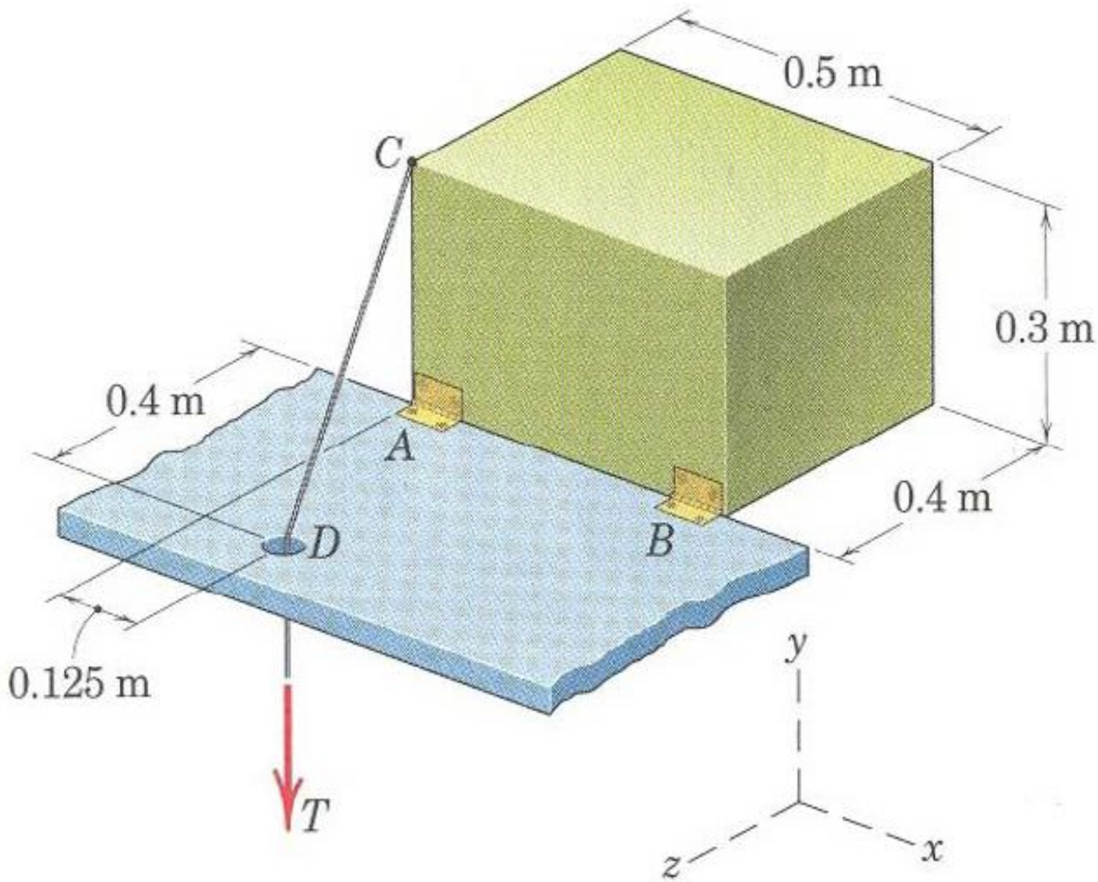
QUESTION

Une caisse en forme de parallélépipède rectangulaire (0,5m x 0,3m x 0,4m) est homogène et a une masse de 125 kg. Cette caisse est maintenue dans la position montrée sur la figure ci-dessous à l'aide du câble CD (frottement en D négligeable) et des deux charnières placées aux coins A et B de la caisse. La charnière B ne peut supporter aucune force axiale et les deux charnières ne reprennent aucun moment.

a) Dessiner le DCL de la caisse;

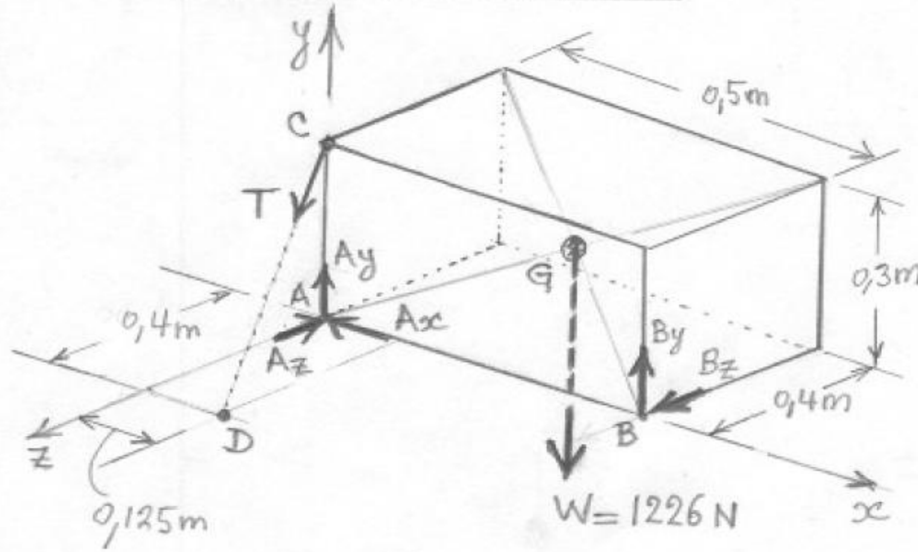
b) Déterminer la grandeur de la tension *T* dans le câble CD.

Présenter la solution à l'aide de la MRP, en fournissant: (1) la **stratégie** et (2) la **résolution**, incluant tout diagramme pertinent.



Solution de la question no. 2

a) DCL de la caisse



$W = 125\,kg \times 9{,}81\,m/s^2 \simeq 1226\,N$

b) Grandeur de la tension T

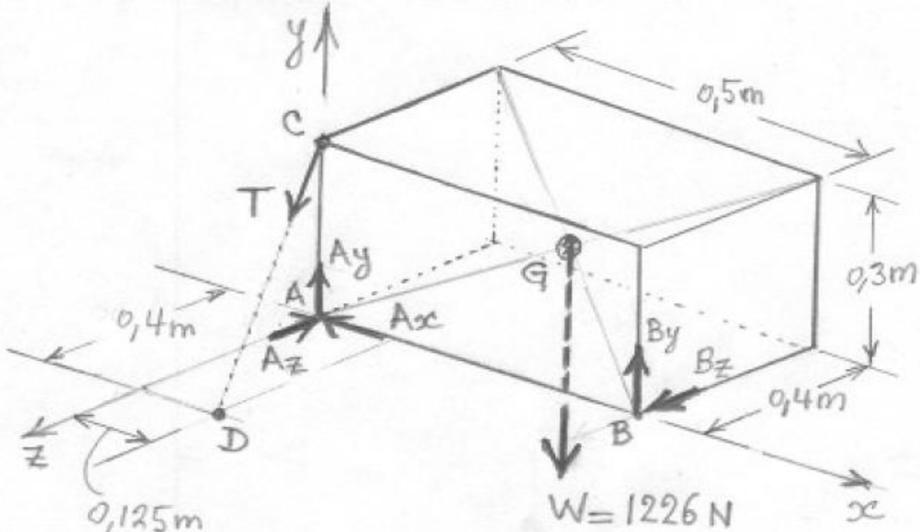
1) Stratégie

$$\vec{T} = T\,\vec{\lambda}_{CD} = T\,\frac{\overrightarrow{CD}}{CD}$$

$\Sigma M_{AB} = 0$ permet d'obtenir T

Solution de la question no. 2

a) DCL de la caisse



$W = 125\,kg \times 9{,}81\,m/s^2 \simeq 1226\,N$

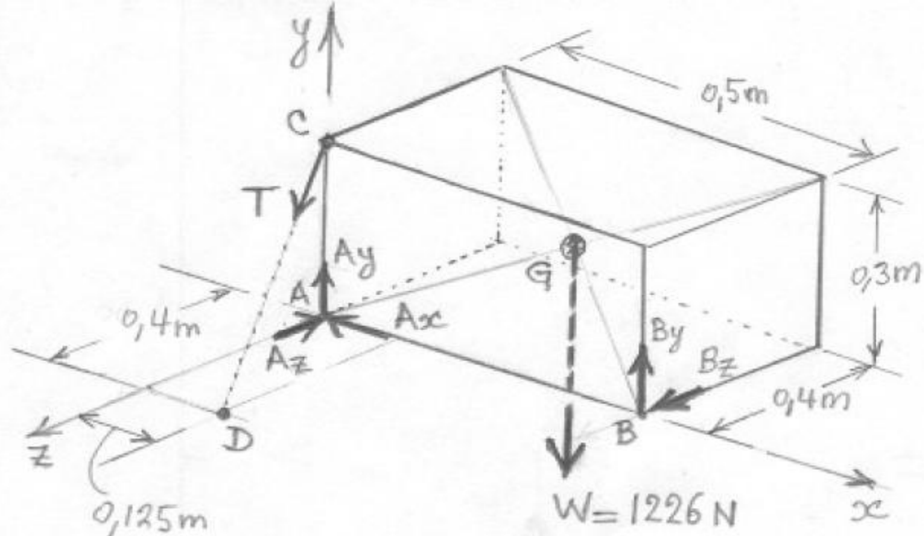
2) Résolution

$$\vec{T} = T\left[\frac{0{,}125\,\vec{i} - 0{,}3\,\vec{j} + 0{,}4\,\vec{k}}{\sqrt{(0{,}125)^2 + (0{,}3)^2 + (0{,}4)^2}}\right]$$

$$= (0{,}2425\,T)\,\vec{i} - (0{,}5821\,T)\,\vec{j} + (0{,}7761\,T)\,\vec{k}$$

Solution de la question no. 2

a) DCL de la caisse



$W = 125\,kg \times 9{,}81\,m/s^2 \simeq 1226\ N$

$$\Sigma M_{AB} = 0{,}3\,T_z - 0{,}2\,W = 0$$

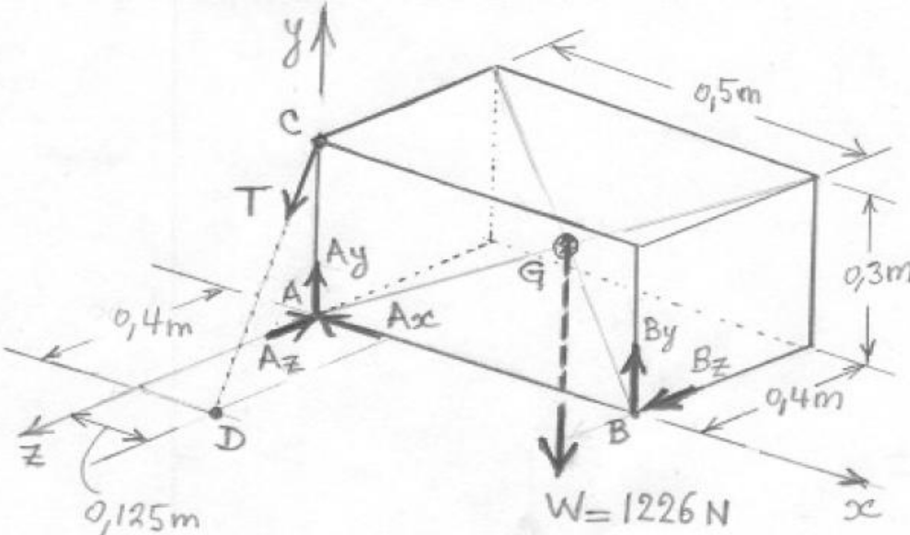
$$0{,}3(0{,}7761\,T) = 0{,}2(1226\,N)$$

D'où :

$$\underline{T = 1053\ N\ (\text{tension})}$$

Solution de la question no. 2

a) DCL de la caisse



$W = 125\,kg \times 9{,}81\,m/s^2 \simeq 1226\,N$

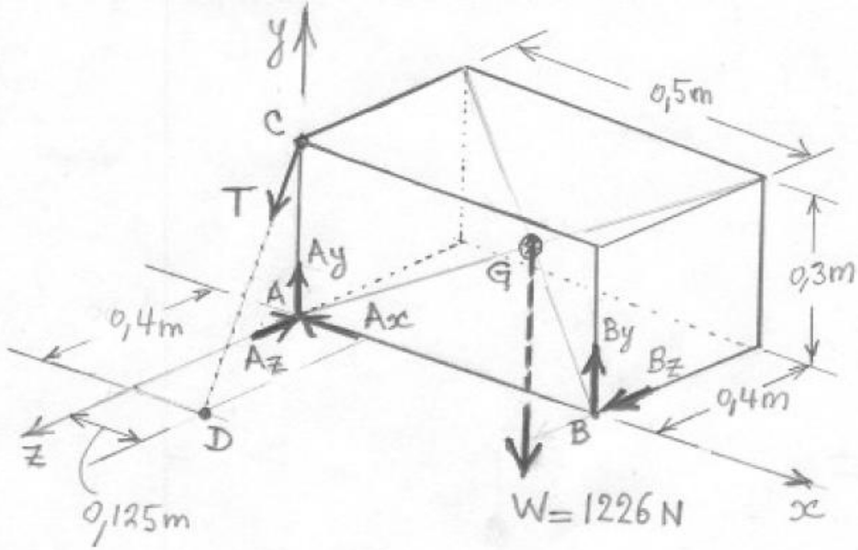
N.B. On peut obtenir T en utilisant le produit mixte pour écrire le moment d'une force par rapport à un axe.

$$\sum M_{AB} = 0 = M_{AB}^{T} + M_{AB}^{W}$$

$$= \vec{\lambda}_{AB} \cdot \left(\vec{AC} \times \vec{T}\right) + \vec{\lambda}_{AB} \cdot \left(\vec{AG} \times (-W\vec{j})\right)$$

Solution de la question no. 2

a) DCL de la caisse



$W = 125\,kg \times 9{,}81\,m/s^2 \simeq 1226\,N$

$$\Sigma M_{AB} = 0 = M_{AB}^{T} + M_{AB}^{W}$$

$$= \vec{\lambda}_{AB} \cdot \left(\vec{AC} \times \vec{T}\right) + \vec{\lambda}_{AB} \cdot \left(\vec{AG} \times (-W\vec{j})\right)$$

$$= T \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}30 & 0 \\ 0{,}2425 & -0{,}5821 & 0{,}7761 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}15 & -0{,}20 \\ 0 & -1226 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= T\left[(0{,}3)(0{,}7761)\right] - (1)(-1226)(-0{,}2)$$

D'où :

$$T = 1053\,N$$

Corps rigide soumis à des forces agissant en 3 points

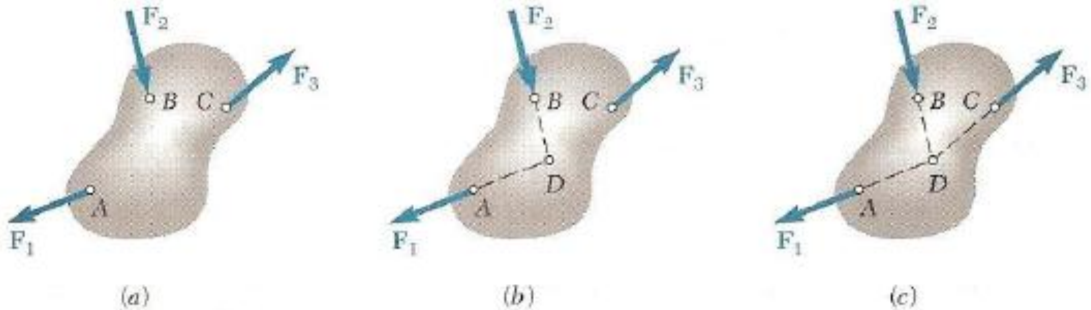


Figure 4.9

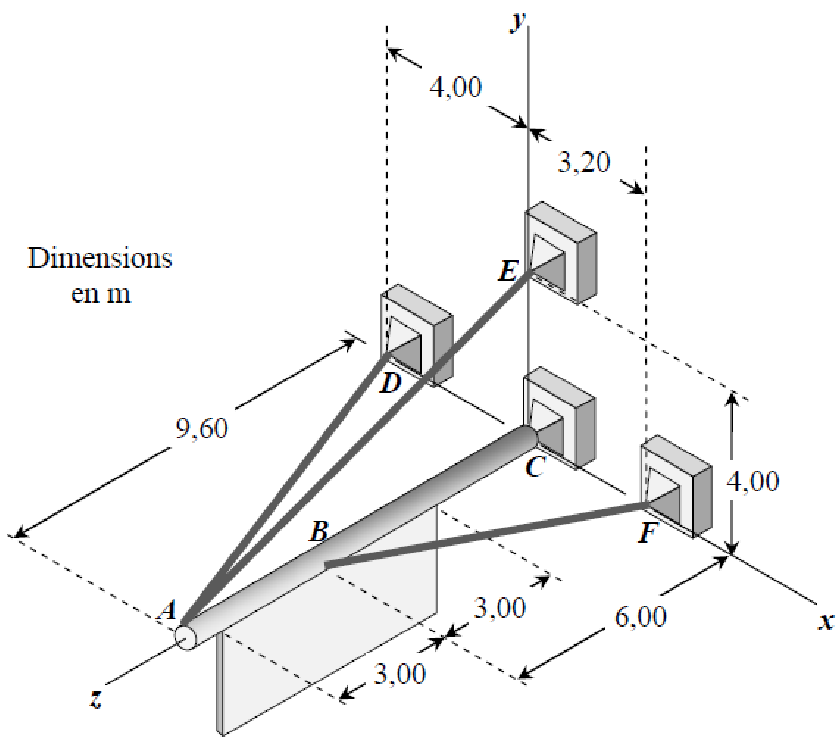
Pour une membrure à 3 forces à l'équilibre:
$\Sigma M_D = 0$, les 3 forces doivent être **concourantes**

On peut donc appliquer les notions de trigonométrie utilisées pour l'équilibre de la particule en 2D

QUESTION

Une hampe *ABC* de 9,60 m de long est retenue par une rotule en *C* et par deux câbles, *BF* et *DAE*. Le câble *DAE* passe par une poulie sans frottement fixée à l'extrémité *A*. La rotule *C* et les points d'ancrage des câbles (*D*, *E* et *F*) sont dans le plan *xy*. Une plaque rectangulaire faite d'un matériau homogène et pesant 1280 N est suspendue verticalement et est solidaire de la hampe.

a) **Tracez** le diagramme du corps libre de la hampe;

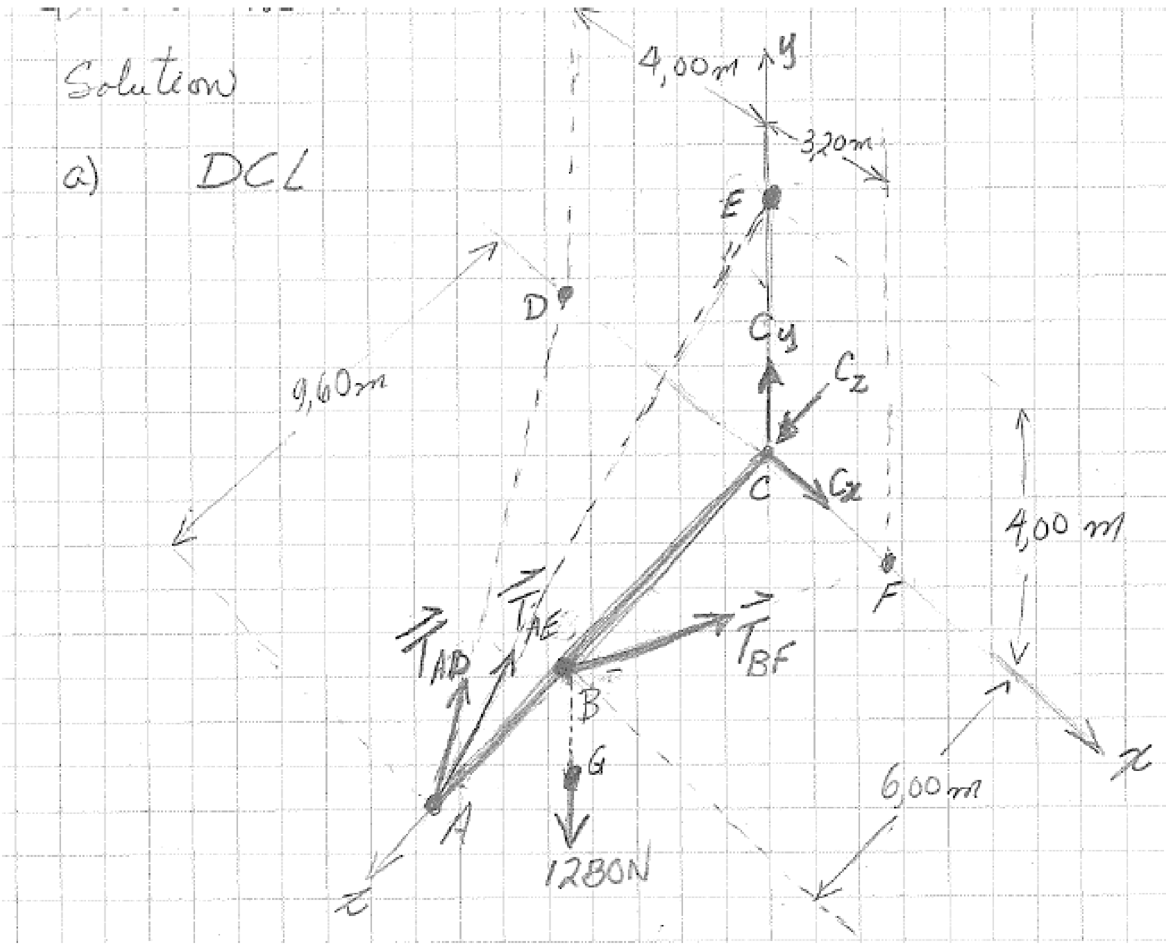


b) **Détaillez** la stratégie d'équations ayant une seule inconnue chacune et permettant d'évaluer les tensions dans les câbles *BF* et *DAE* ainsi que les réactions à la rotule *C*;

c) **Évaluez** la tension dans le câble *DAE*;

d) **Déterminez** si ce montage empêche tout mouvement d'une ou de plusieurs de ses composantes. **Justifiez** votre réponse avec une équation d'équilibre.

(a)


Solution
a) DCL
4,00m
y
3,20m
E
D
Cy
Cz
9,60m
C
Cx
4,00 m
F
T_AD
T_AE
T_BF
B
G
A
1280N
z
x
6,00m

(b)

$$\sum M_{\overline{CF}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{AD} \text{ et } \vec{T}_{AE} \text{ car } \vec{T}_{AE} = \vec{\lambda}_{AE} T_{AD}$$

$$\sum \Sigma_{\overline{CE}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BF}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow C_x$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow C_y$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow C_z$$

on a finalement 5 inconnues C_x, C_y, C_z, T_{BF} et T_{AD} $(= T_{AE})$

(c) $T_{DAE} = 2080$ N

(d)

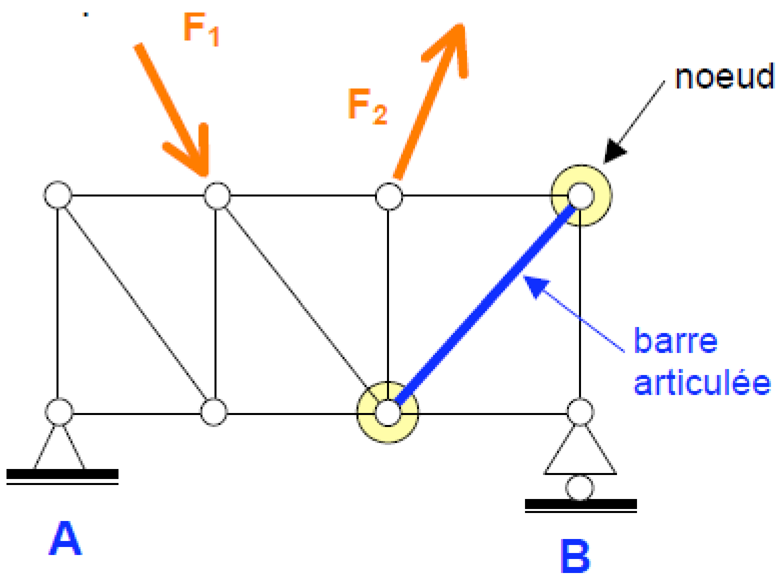
$\sum M_{Cz} = 0$ ne peut être vérifiée.

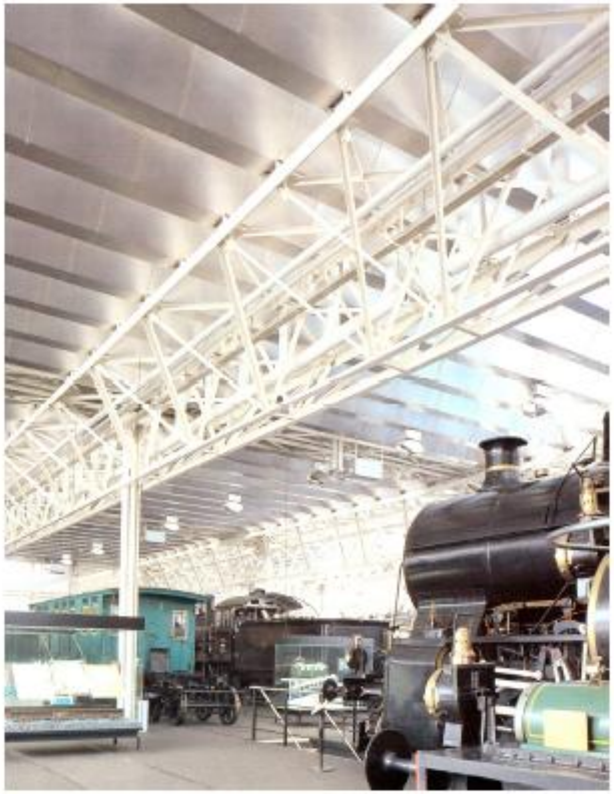
Les Treillis

Ensemble de barres, assemblées les unes aux autres et qui sont articulées à leurs extrémités de manière à former une structure portante stable (non mobile), soit plane, soit spatiale .

Ils permettent une certaine « légèreté » de la structure. On appelle nœuds les points de rencontre des barres du treillis; on admet que ces nœuds sont des articulations parfaites où les axes des barres concourent sans excentricité.

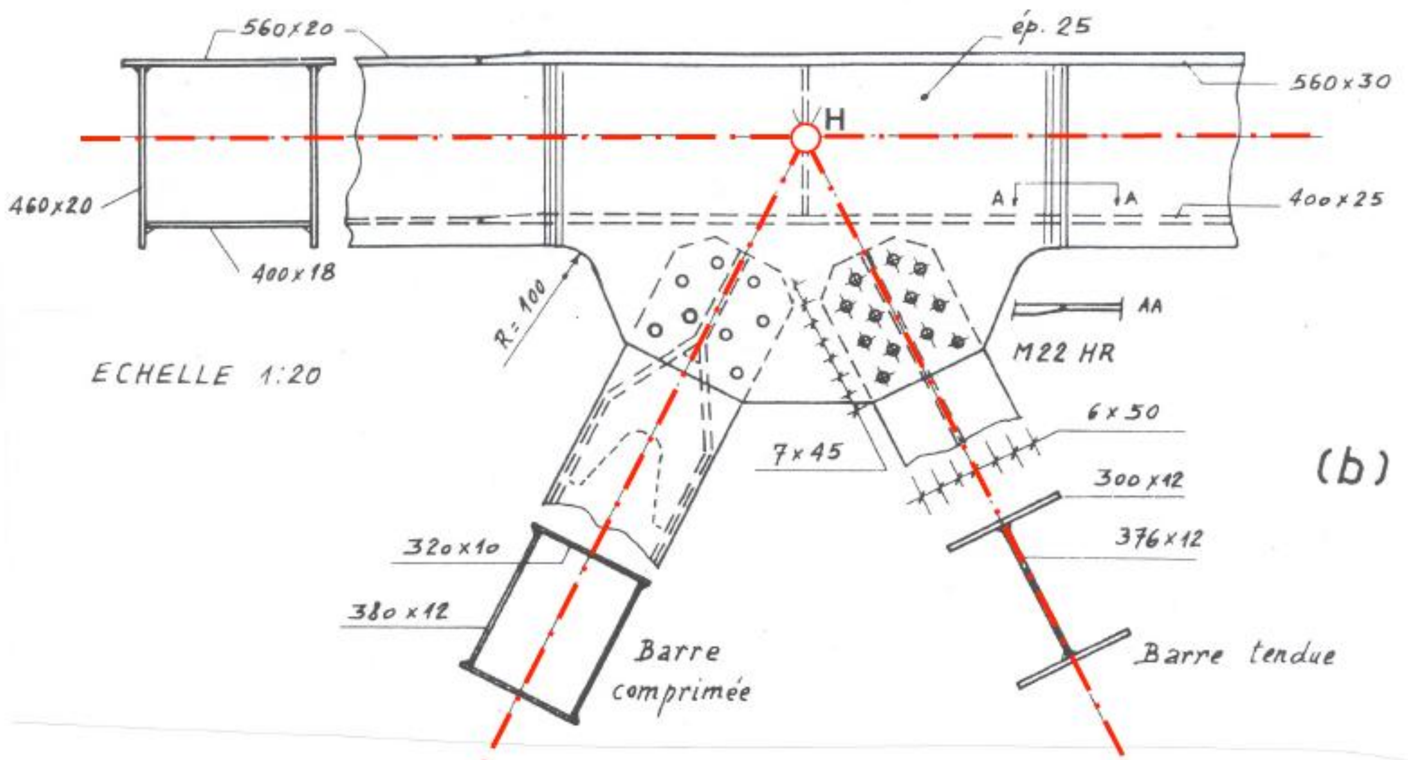
Les charges extérieures ne devraient agir qu’aux nœuds (forces nodales), la barre ne peut transmettre de force qu’à ses extrémités.





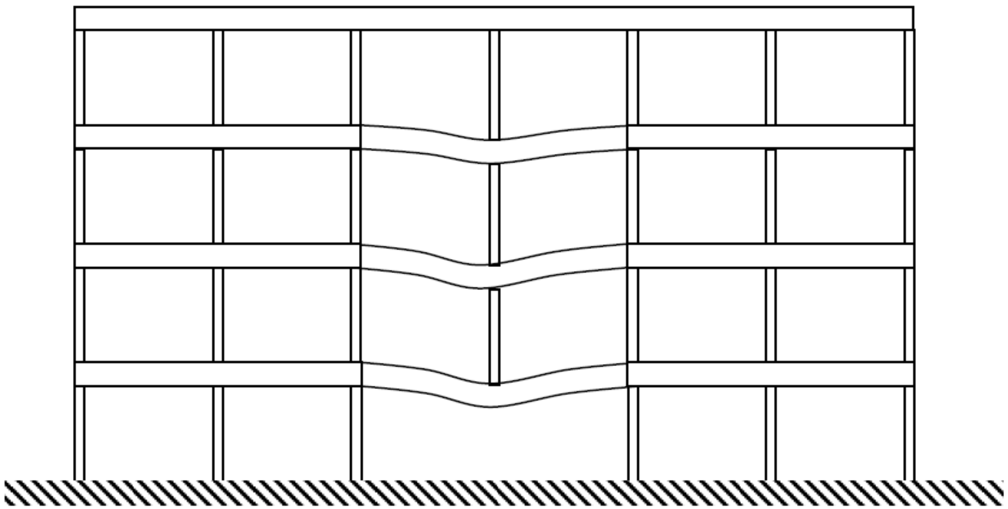
Treillis spatial (3D)

Treillis plan (2D)

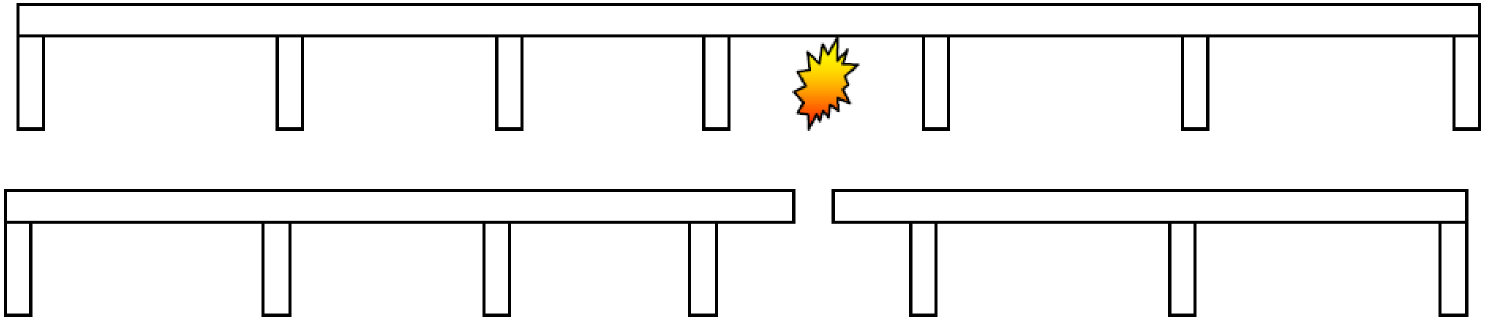


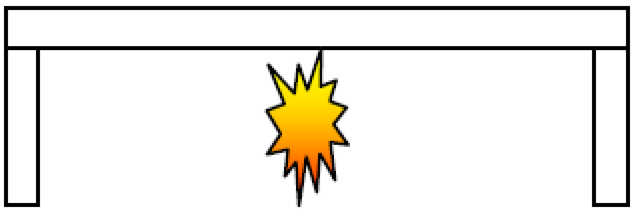
Les axes des barres sont bel et bien concourants

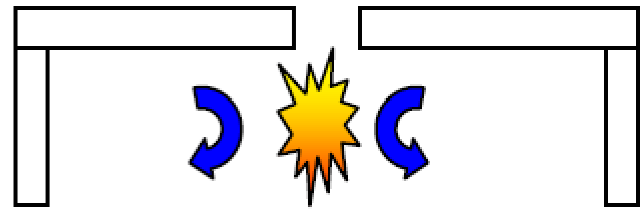
Stabilité d'un treillis



Adaptation d'un portique complexe à la ruine d'un de ses appuis







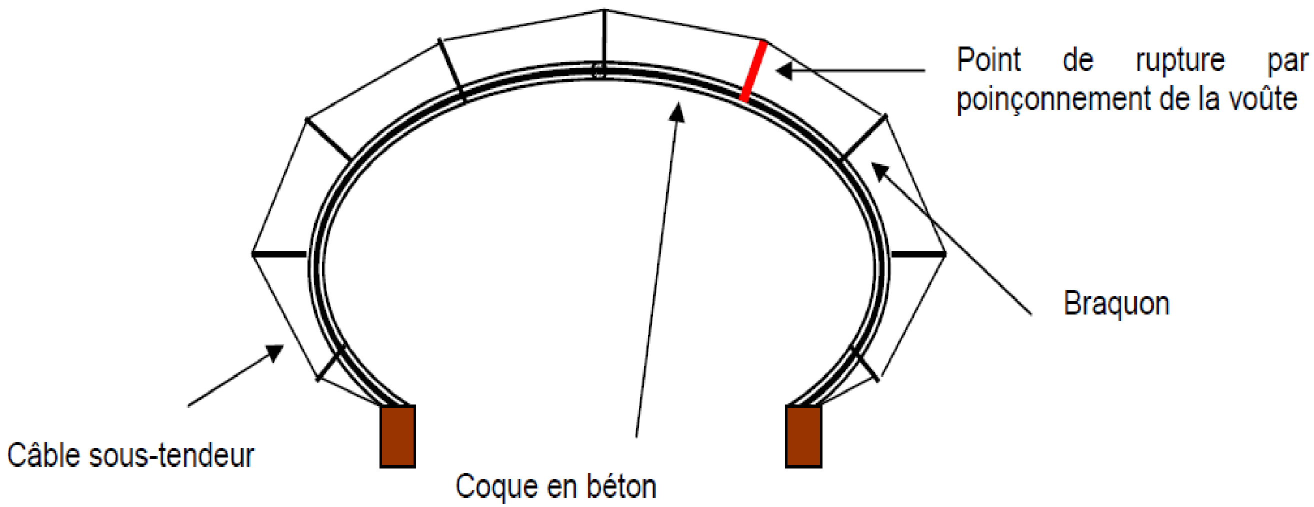
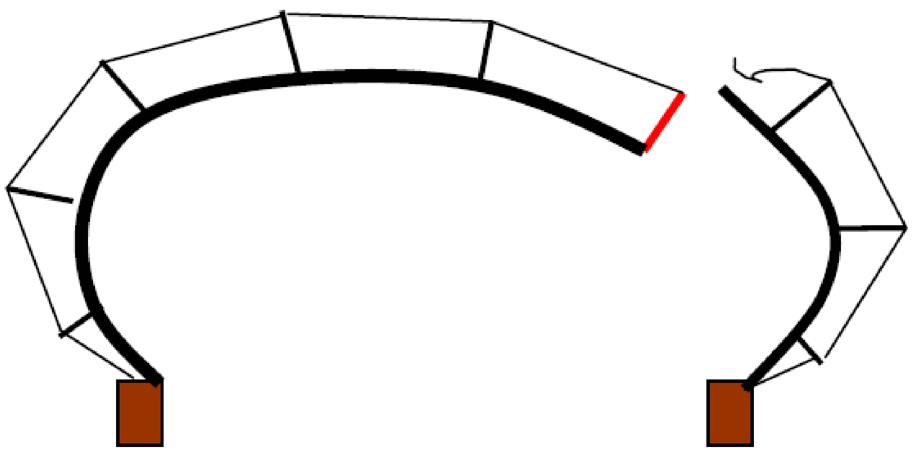


Schéma de la section transversale de la voûte de la jetée de l'aérogare CDG 2E



Ruine de la section entraînant la ruine générale de la coque