ÉQUILIBRE des CORPS RIGIDES: Équilibre dans un plan

1. Conditions d'équilibre
2. Diagramme du corps libéré (DCL)
3. Réactions des appuis et liaisons en 2D
4. Équations d'équilibre en 2 D
5. Réactions statiquement indéterminées
6. Liaisons partielles

Conditions d'équilibre

Mathématiquement,
les conditions nécessaires et suffisantes à
l'équilibre d'un corps rigide
sont les suivantes:

Vectoriellement

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

Scalairement

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Lorsqu'un corps rigide est à l'**équilibre**,
le système de forces externes agissant sur lui
ne produit **ni translation**, **ni rotation**.

Diagramme du corps libéré (DCL)

Fonction

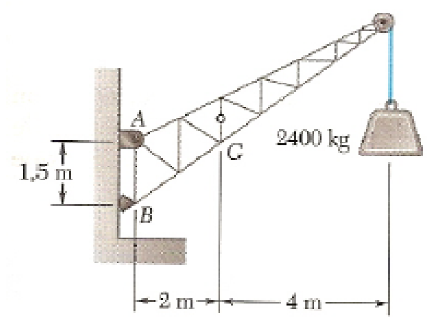
Représenter,
sous forme schématique,
l'ensemble de **toutes les forces** d'un système
pour en faire l'analyse

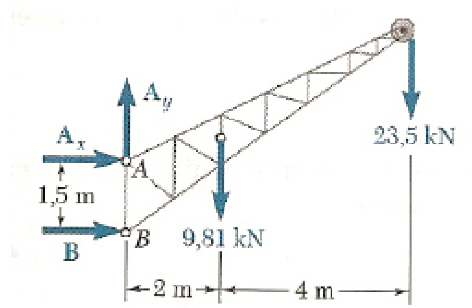
Diagramme du corps libéré (DCL)

Étapes

1. Choisir le corps à isoler et tracer son contour
2. Tracer toutes les forces externes, **connues et inconnues**
3. Pour les forces **connues**:
   Indiquer la grandeur, la direction et le sens.
4. Pour les forces **inconnues** (habituellement les **réactions**):
   indiquer la direction et le sens, selon le type d'appui.
5. Ajouter les dimensions utiles et le système d'axe.

Exemple:





Réactions des **appuis** et **liaisons** des structures planes
3 types

1.
Réaction équivalente à
une **force** de grandeur inconnue, mais de direction connue

2.
Réaction équivalente à
une **force** de grandeur et direction inconnues

3.
Réaction équivalente à
une **force** de grandeur et direction inconnues
et
un **couple** de grandeur inconnue

Réactions des appuis et liaisons des structures planes

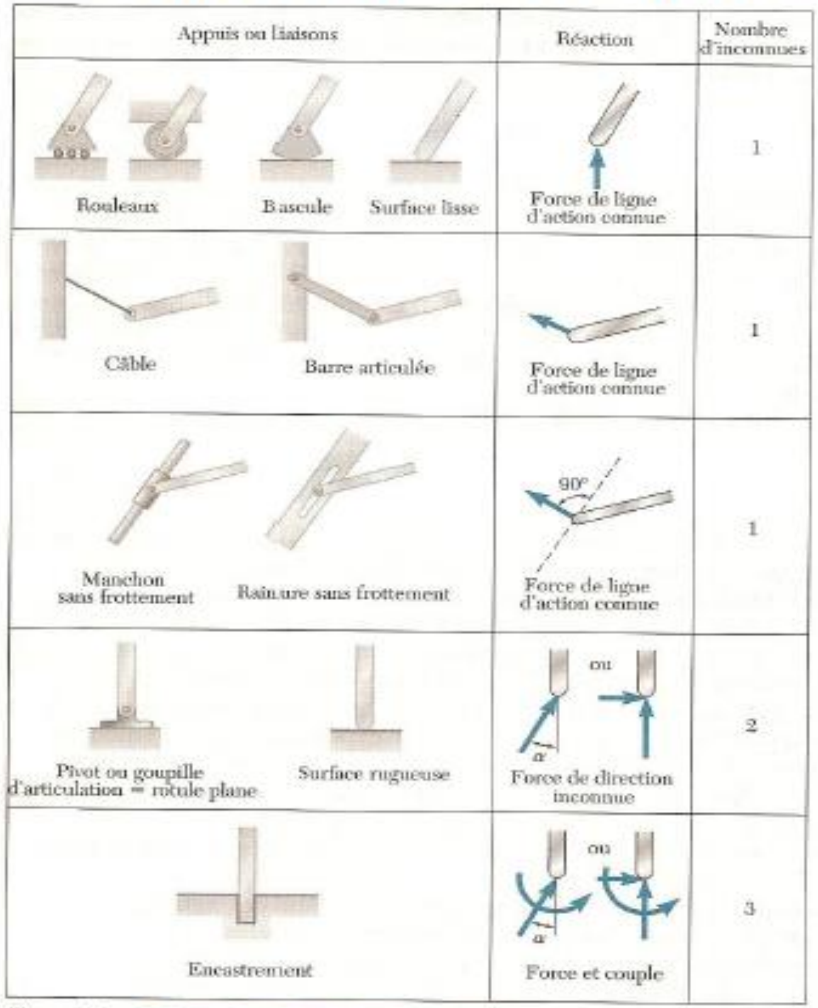
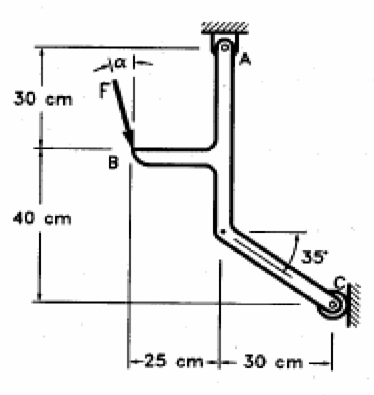


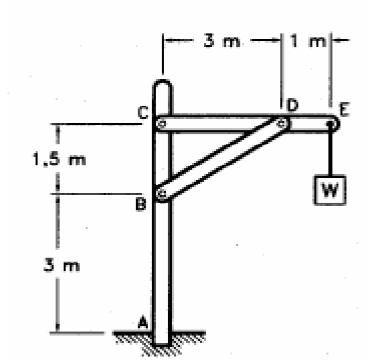
Figure 4.1 Appuis et liaisons des structures planes

le

Réactions des appuis et liaisons des structures planes

Exemples





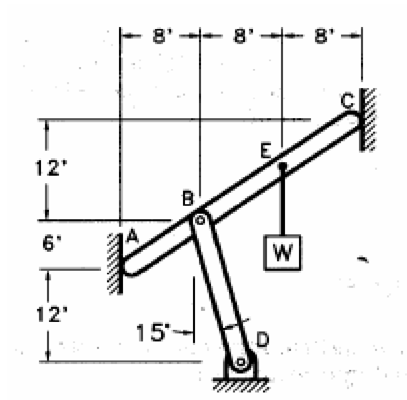


Tableau d'identification des appuis à compléter

DCL à tracer

Appui à 1 inconnue	Appui à 2 inconnues	Appui à 3 inconnues

Appui à 1 inconnue	Appui à 2 inconnues	Appui à 3 inconnues

Appui à 1 inconnue	Appui à 2 inconnues	Appui à 3 inconnues

Équilibre d'un corps rigide 2D

Les conditions d'équilibre
d'un **corps rigide dans le plan**
sont les suivantes:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4.5}$$

En supposant que les axes *x* et *y* soient dans le plan de la structure
et
où *A* correspond à un point de la structure.

Les **3 équations**
donnent une solution pour un maximum
de **3 inconnues**.

Équilibre d’un corps rigide 2D
Équations d’équilibre

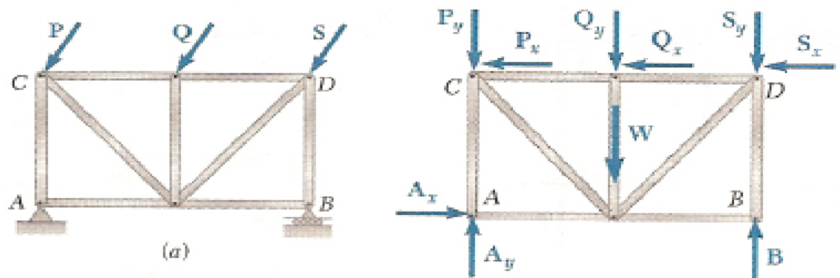


Figure 4.2

Appui à 1 inconnue	Appui à 2 inconnues	Appui à 3 inconnues
B	A	

3 équations d’équilibre indépendantes:

$\Sigma M_A = 0$, permet de trouver la force B
$\Sigma F_x = 0$, permet de trouver la force A_x
$\Sigma F_y = 0$, permet de trouver la force A_y

$\Sigma M_B = 0$ ne permet pas de trouver une 4ième inconnue
car
<u>La 4^{ième} équation d’équilibre n’est pas indépendante des 3 premières</u>
La 4^{ième} équation d’équilibre peut servir à vérifier les résultats obtenus à l’aide des 3 premières équations

Équilibre d'un corps rigide 2D

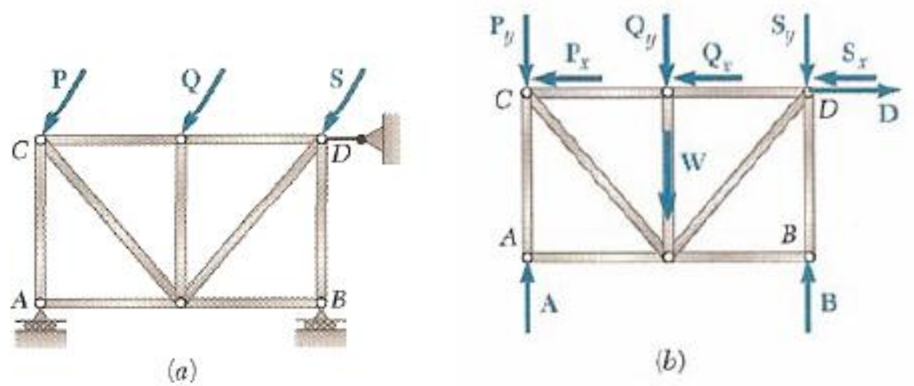


Figure 4.3

Appui à 1 inconnue	Appui à 2 inconnues	Appui à 3 inconnues
A B et D		

3 équations d'équilibre indépendantes:

$\Sigma M_D = 0$, permet de trouver la force A
$\Sigma M_C = 0$, permet de trouver la force B
$\Sigma F_x = 0$, permet de trouver la force D

Réactions statiquement indéterminées

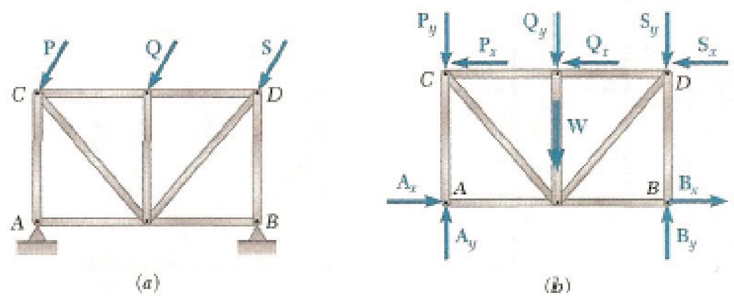


Figure 4.4 Réactions statiquement indéterminées (hyperstatiques)

Appui à 1 inconnue	Appui à 2 inconnues	Appui à 3 inconnues
	A, B	

3 équations d'équilibre indépendantes
4 inconnues A_x, A_y, B_x, B_y

$\Sigma M_A = 0$, permet de trouver B_y
$\Sigma M_B = 0$, permet de trouver A_y
$\Sigma F_x = 0$, permet de trouver $A_x + B_x$

Les réactions A_x et B_x sont statiquement indéterminées ou la structure est hyperstatique.

Les 2 appuis sont plus contraignants que nécessaires.

Liaisons incomplètes

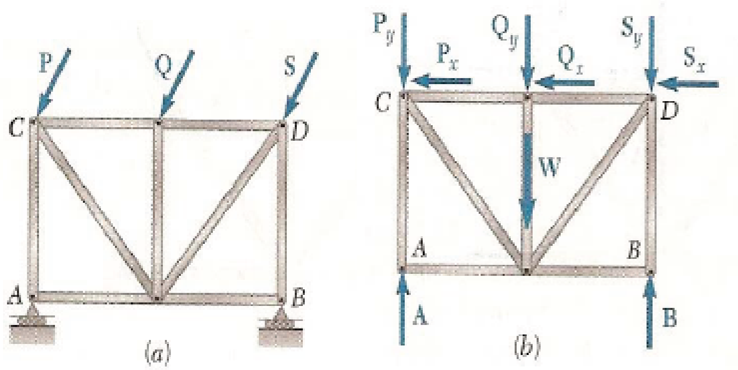


Figure 4.5 Liaisons incomplètes

Appui à 1 inconnue	Appui à 2 inconnues	Appui à 3 inconnues
A, B		

3 équations d'équilibre indépendantes
2 inconnues A_y et B_y

$\Sigma M_A = 0$, permet de trouver B_y
$\Sigma M_B = 0$, permet de trouver A_y
$\Sigma F_x = 0$, équation non satisfaite

Les réactions ne permettent pas de maintenir l'équilibre de translation en *x*.
La structure est partiellement liée ou les liaisons sont partielles.

Liaisons incorrectes

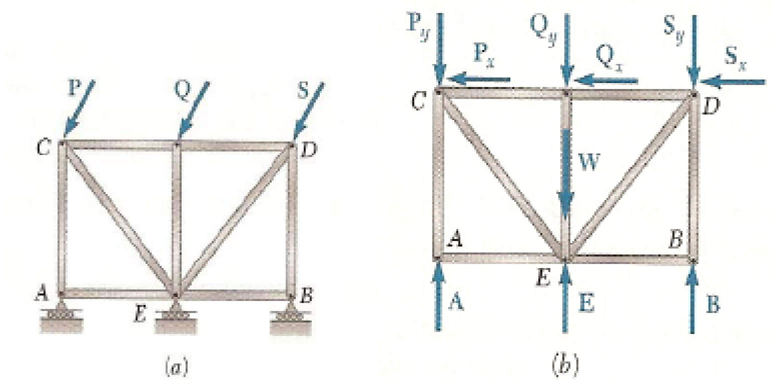


Figure 4.6 Liaisons incorrectes

Appui à 1 inconnue	Appui à 2 inconnues	Appui à 3 inconnues
A, E et B		

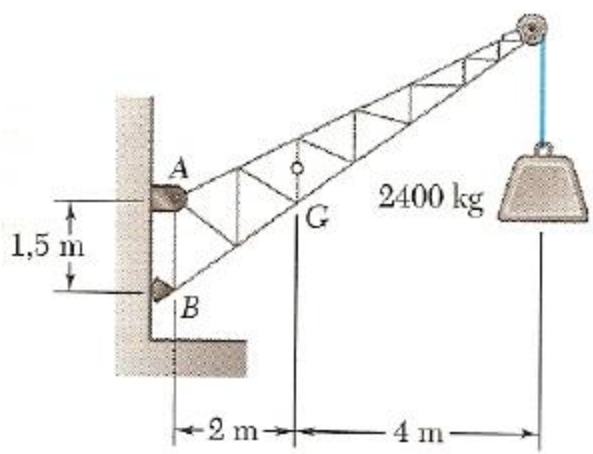
3 équations d'équilibre indépendantes
3 inconnues A, E et B

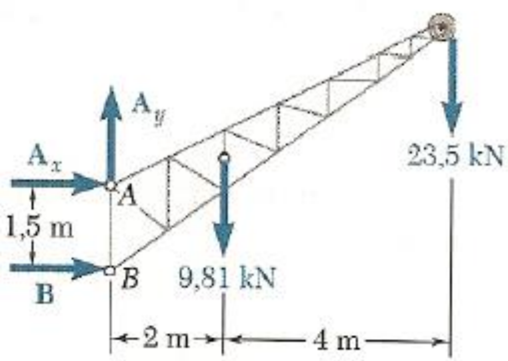
Les 3 réactions sont en *y* donc
$\Sigma Fx = 0$, équation non satisfaite

<u>Les 3 réactions ne permettent pas de maintenir l'équilibre de translation en *x*.</u>
La structure est incorrectement liée ou les liaisons sont incorrectes

Problème résolu

On utilise une grue stationnaire ayant une masse de 1000 kg pour soulever une caisse de 2400 kg. La grue est tenue en situation d'équilibre par une rotule au point A et un appui à bascule au point B. Son centre de gravité est situé au point G. Déterminez les composantes des réactions aux points A et B.





SOLUTION

Diagramme du corps libre. On trace d'abord le diagramme du corps libre. On calcule ensuite le poids de la grue et celui de la caisse en multipliant leur masse respective par la constante gravitationnelle, $g = 9{,}81\ m/s^2$. Ainsi, on obtient 9810 N ou 9,81 kN pour la grue, et 23 500 N ou 23,5 kN pour la caisse.

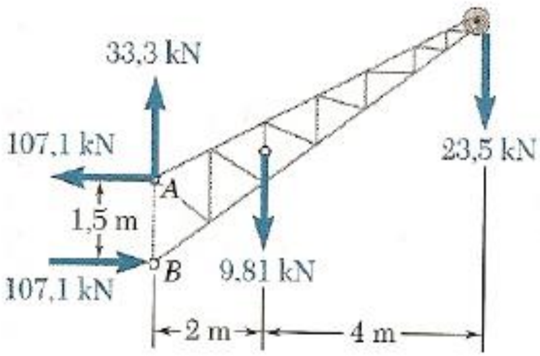
La réaction à la rotule A est une force de direction inconnue, représentée par ses composantes $\mathbf{A}_x$ et $\mathbf{A}_y$. La réaction à l'appui à bascule B est perpendiculaire à la surface de contact, donc horizontale. On suppose que $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ et $\mathbf{B}$ agissent dans les directions illustrées à la figure ci-contre.

Calcul de B. L'équilibre exige que la somme des moments des forces externes au point A soit nulle. L'équation ne contient ni A_x ni A_y, puisque les moments de $\mathbf{A}_x$ et $\mathbf{A}_y$ par rapport au point A sont nuls. En multipliant la grandeur de chacune des autres forces par leur distance au point A, on écrit

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad +B(1{,}5\ \text{m}) - (9{,}81\ \text{kN})(2\ \text{m}) - (23{,}5\ \text{kN})(6\ \text{m}) = 0$$

$$B = +107{,}1\ \text{kN} \qquad\qquad \mathbf{B} = 107{,}1\ \text{kN} \rightarrow \blacktriangleleft$$

Étant donné que le résultat est positif, l'hypothèse de l'orientation de la force au point B est valide.



Calcul de A_x. La grandeur de la composante A_x est calculée en exprimant que la somme des composantes horizontales des forces externes est nulle.

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$
$$A_x + 107{,}1 \text{ kN} = 0$$
$$A_x = -107{,}1 \text{ kN} \qquad \mathbf{A}_x = 107{,}1 \text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

Étant donné que le résultat est négatif, l'hypothèse de l'orientation de la composante $\mathbf{A}_x$ n'est pas valide ; celle-ci est de sens opposé (vers la gauche).

Calcul de A_y. En suivant le même raisonnement que précédemment, on sait que la somme des composantes verticales est nulle.

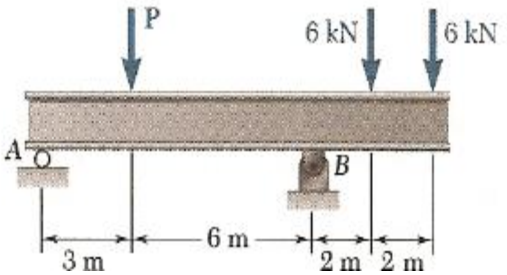
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad A_y - 9{,}81 \text{ kN} - 23{,}5 \text{ kN} = 0$$
$$A_y = +33{,}3 \text{ kN} \qquad \mathbf{A}_y = 33{,}3 \text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

En additionnant les vecteurs $\mathbf{A}_x$ et $\mathbf{A}_y$, on trouve que la réaction à l'appui A est 112,2 kN ⦪17,3°.

Vérification. On peut valider les réactions obtenues en se rappelant que la somme des moments des forces externes (charges et réactions) par rapport à un point donné est nécessairement nulle. Ainsi, si l'on utilise le point B, on écrit

$$+\circlearrowleft\Sigma M_B = -(9{,}81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23{,}5 \text{ kN})(6 \text{ m}) + (107{,}1 \text{ kN})(1{,}5 \text{ m}) = 0$$

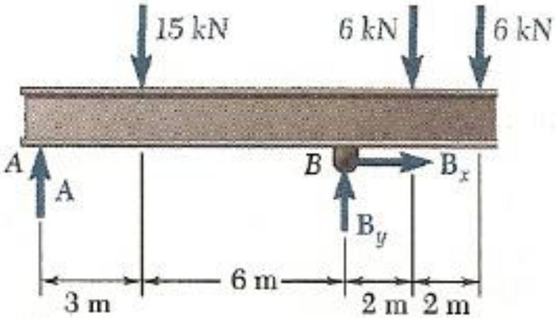
Problème résolu 4.2



On applique trois charges à une poutre tel qu'illustré. La poutre est supportée par un appui à rouleau au point A et par un appui à rotule au point B. En supposant que le poids de la poutre est négligeable, déterminez les réactions en A et en B, sachant que $P = 15$ kN.

SOLUTION

Diagramme du corps libre. On trace le diagramme du corps libre ; la réaction à l'appui A est verticale et elle est identifiée par **A** ; cependant, la réaction à l'appui B étant de direction inconnue, on la représente selon ses composantes $\mathbf{B}_x$ et $\mathbf{B}_y$. On suppose que chacune des composantes agit selon les directions illustrées à la figure ci-contre.



Équations d'équilibre. En écrivant les trois équations d'équilibre suivantes et en les résolvant par rapport à **A**, $\mathbf{B}_x$ et $\mathbf{B}_y$, on obtient

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\quad B_x = 0 \quad \mathbf{B}_x = 0$ ◀

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$:

$$-(15 \text{ kN})(3 \text{ m}) + B_y(9 \text{ m}) - (6 \text{ kN})(11 \text{ m}) - (6 \text{ kN})(13 \text{ m}) = 0$$

$$B_y = +21{,}0 \text{ kN} \qquad \mathbf{B}_y = 21{,}0 \text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$:

$$-A(9 \text{ m}) + (15 \text{ kN})(6 \text{ m}) - (6 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (6 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 0$$

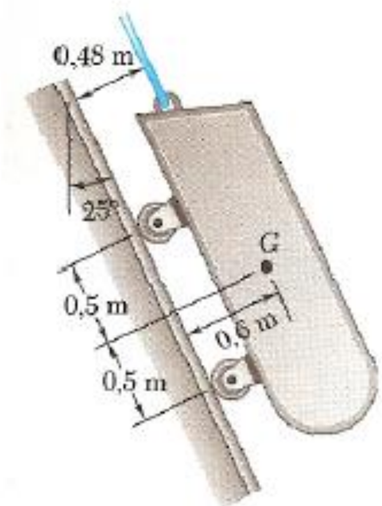
$$A = +6{,}00 \text{ kN} \qquad \mathbf{A} = 6{,}00 \text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

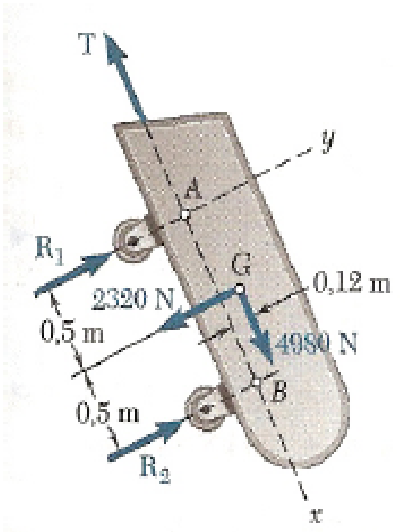
Vérification. On peut vérifier ces résultats en additionnant les composantes verticales de toutes les forces externes :

$$+\uparrow \Sigma F_y = +6{,}00 \text{ kN} - 15 \text{ kN} + 21{,}0 \text{ kN} - 6 \text{ kN} - 6 \text{ kN} = 0$$

Problème résolu 4.3

Une benne de chargement de 5500 N est au repos sur des rails selon un angle de 25° avec la verticale. Son centre de gravité est à 0,6 m des rails, à mi-distance des deux essieux. La benne est retenue par un câble attaché à 0,48 m des rails. Calculez la tension dans le câble et la réaction à chacun des essieux montés.





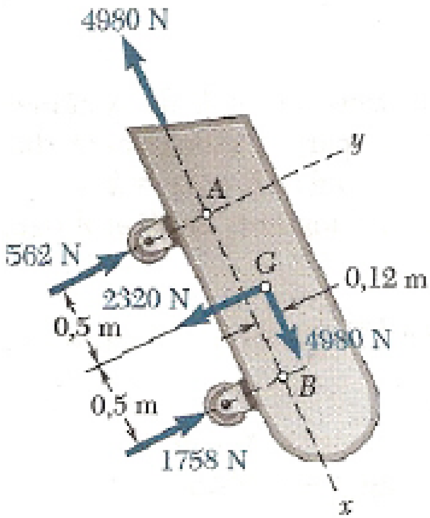
SOLUTION

Diagramme du corps libre. On trace d'abord le diagramme du corps libre. La réaction à chacune des roues est perpendiculaire aux rails tandis que la force de traction **T** est parallèle aux rails. Pour cette raison, on identifie l'axe des x parallèle aux rails et l'axe des y perpendiculaire aux rails. On décompose le poids de la benne de 5500 N selon ses composantes x et y.

$$W_x = +(5500 \text{ N}) \cos 25° = +4980 \text{ N}$$
$$W_y = -(5500 \text{ N}) \sin 25° = -2320 \text{ N}$$

Équations d'équilibre. On prend les moments par rapport au point A afin d'éliminer **T** et $\mathbf{R}_1$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -(2320 \text{ N})(0{,}5 \text{ m}) - (4980 \text{ N})(0{,}12 \text{ m}) + R_2(1 \text{ m}) = 0$$
$$R_2 = +1758 \text{ N} \qquad \mathbf{R}_2 = 1758 \text{ N} \nearrow \blacktriangleleft$$



Ensuite, en prenant les moments par rapport au point B pour éliminer $\mathbf{T}$ et $\mathbf{R}_2$, on écrit

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (2320\ \text{N})(0{,}5\ \text{m}) - (4980\ \text{N})(0{,}12\ \text{m}) - R_1(1\ \text{m}) = 0$$

$$R_1 = +562\ \text{N} \qquad\qquad \mathbf{R}_1 = +562\ \text{N} \nearrow \blacktriangleleft$$

On obtient la valeur de T en solutionnant

$$\searrow + \Sigma F_x = 0: \qquad +4980\ \text{N} - T = 0$$

$$T = +4980\ \text{N} \qquad\qquad \mathbf{T} = 4980\ \text{N} \nwarrow \blacktriangleleft$$

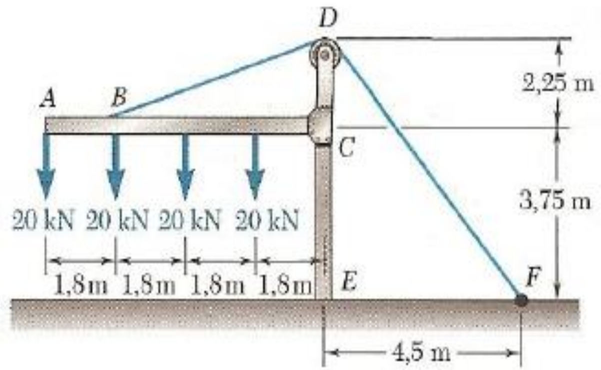
Le schéma ci-contre illustre les valeurs des différentes réactions.

Vérification. On peut vérifier les résultats à l'aide de l'équation d'équilibre suivante :

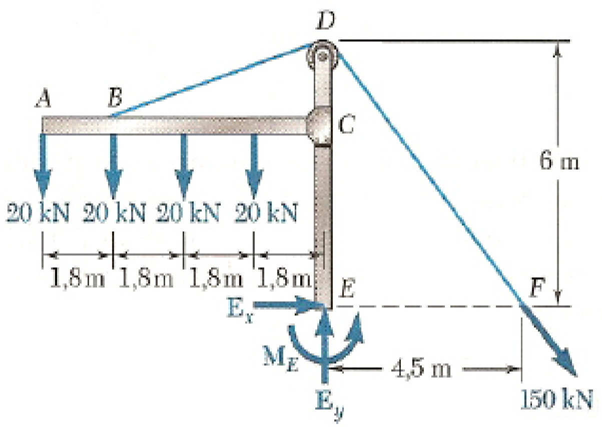
$$\nearrow + \Sigma F_y = +562\ \text{N} + 1758\ \text{N} - 2320\ \text{N} = 0$$

On aurait pu aussi vérifier la solution en calculant les moments par rapport à un point autre que A ou B.

Problème résolu 4.4



Une structure supporte une section du toit d'un petit édifice, tel qu'illustré au schéma ci-contre. Sachant que la tension dans le câble *BDF* est de 150 kN, déterminez la réaction à l'encastrement *E*.



SOLUTION

Diagramme du corps libre. On trace le diagramme du corps libre de la structure et du câble *BDF*. On représente la réaction au point *E* par les composantes $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$ et le couple $\mathbf{M}_E$. Les autres forces en présence agissant sur le corps libre sont les quatre charges de 20 kN et la tension appliquée à l'extrémité du câble au point *F*.

Équations d'équilibre. Sachant que

$DF = \sqrt{(4{,}5\text{ m})^2 + (6\text{ m})^2} = 7{,}5\text{ m}$, on écrit

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad E_x + \frac{4{,}5}{7{,}5}(150\text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90{,}0\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_x = 90{,}0\text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad E_y - 4(20\text{ kN}) - \frac{6}{7{,}5}(150\text{ kN}) = 0$$

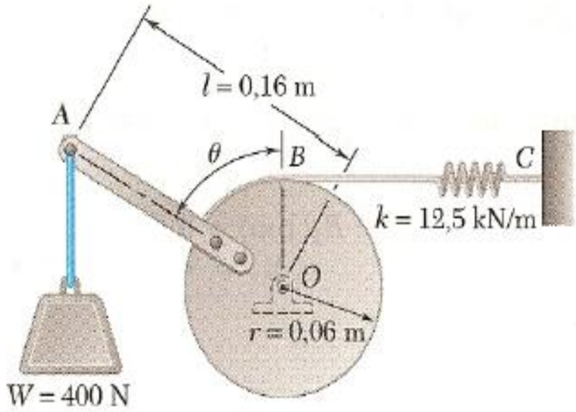
$$E_y = +200\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_y = 200\text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \qquad (20\text{ kN})(7{,}2\text{ m}) + (20\text{ kN})(5{,}4\text{ m}) + (20\text{ kN})(3{,}6\text{ m})$$

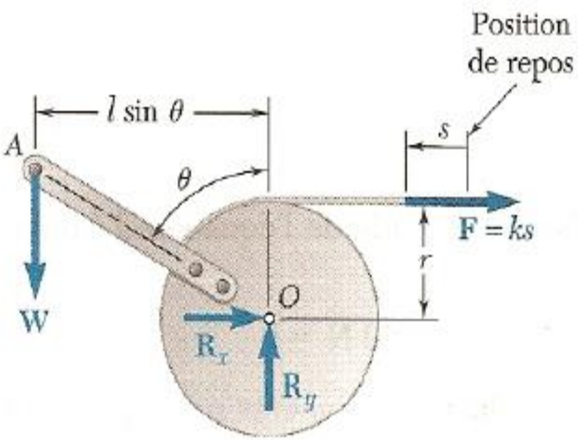
$$+ (20\text{ kN})(1{,}8\text{ m}) - \frac{6}{7{,}5}(150\text{ kN})(4{,}5\text{ m}) + M_E = 0$$

$$M_E = +180{,}0\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \mathbf{M}_E = 180{,}0\text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowleft \blacktriangleleft$$

Problème résolu 4.5



Un poids de 400 N est attaché à l'extrémité A du levier OA. La constante élastique du ressort BC est de $k = 12{,}5$ kN/m. Le ressort est au repos quand $\theta = 0$. Déterminez la position d'équilibre.



SOLUTION

Diagramme du corps libre (DCL). On trace le DCL du système composé du levier et du cylindre. En identifiant par s l'allongement du ressort par rapport à sa position au repos, on a : $s = r\theta$ et $F = ks = kr\theta$.

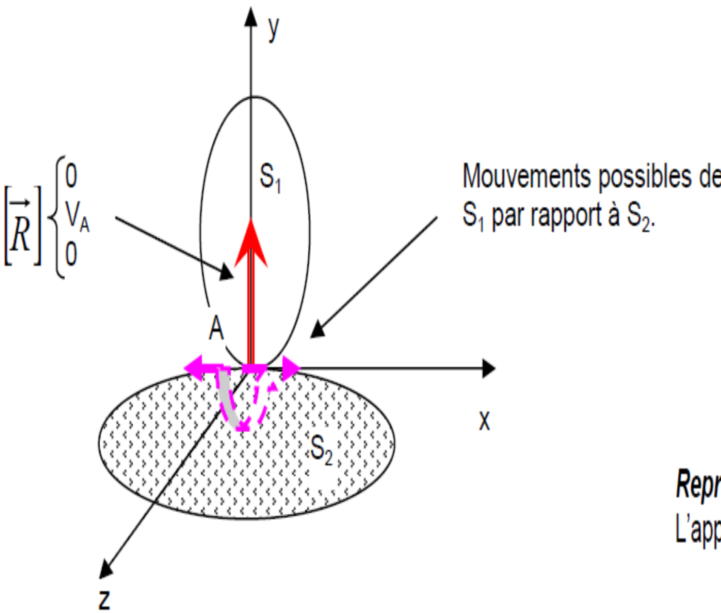
Équation d'équilibre. Si l'on additionne les moments de **W** et **F** par rapport au point O, on a :

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = 0: \qquad Wl \sin\theta - r(kr\theta) = 0 \qquad \sin\theta = \frac{kr^2}{Wl}\,\theta$$

En substituant les valeurs données, on obtient

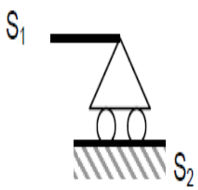
$$\sin\theta = \frac{(12{,}5 \text{ kN/m})(0{,}06 \text{ m})^2}{(400 \text{ N})(0{,}16 \text{ m})}\,\theta \qquad \sin\theta = 0{,}703\,\theta$$

Une solution par essais et erreurs donne $\theta = 0$ ou $\theta = 80{,}3°$ ◄



Représentation :

L'appui simple glissant est représenté par le symbole suivant :



La pointe du triangle symbolise le fait que l'appui est ponctuel, permettant ainsi la rotation autour de la pointe du triangle, tandis que les deux rouleaux signifient que ce dernier est glissant.

Exemples d'appuis simples glissants (ou libres) :